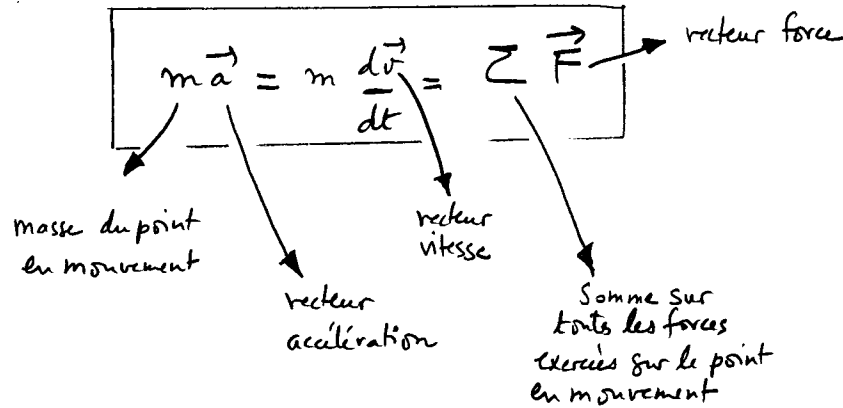


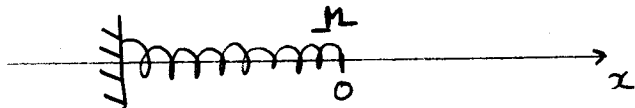
Notions clés en mécanique Newtonienne du point

\* La mécanique dite "classique" est régie par l'équation de Newton

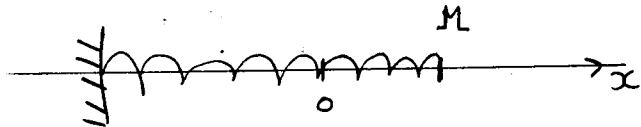


\* 1<sup>er</sup> exemple : l'oscillateur harmonique (ressort) à une dimension

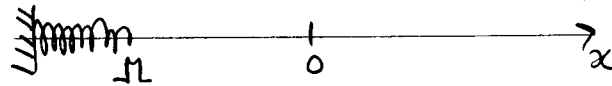
(1) ressort au repos  $\rightarrow$  le point M est en  $x=0$



(2) ressort étiré  $\rightarrow$  l'abscisse du point M (extrémité du ressort) est positive ( $x > 0$ )



(3) ressort comprimé  $\rightarrow x < 0$



• Considérons le mouvement du point M au cours du temps. Lorsque le ressort est étiré ou comprimé, une force de rappel

$$\vec{F} = -kx \vec{e}_x, \quad k > 0$$

s'exerce sur M, où k est la constante de raideur du ressort.

$$\vec{OM} = x \vec{e}_x \rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x = \dot{x} \vec{e}_x \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x = \ddot{x} \vec{e}_x \end{cases}$$

notation

• D'après l'équation de Newton

$$m\ddot{x} \vec{e}_x = -kx \vec{e}_x \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \text{où } \omega^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned}$$

• La solution s'écrit

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

En effet:  $\ddot{x}(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$

$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x(t)$

Détermination des coefficients A et B à partir des conditions initiales:

$x(0) = A$ ,  
 ↑  
 position de M  
 à l'instant  $t=0$

$\dot{x}(0) = B\omega$   
 ↑  
 vitesse initiale

⇒  $x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t$

Conclusions importantes:

- 1- En mécanique classique, la position du point M est parfaitement connue à chaque instant t.
- 2- La position initiale  $x(0)$  ET la vitesse initiale  $\dot{x}(0)$  déterminent de manière unique la trajectoire de M. La mécanique classique est donc déterministe.
- 3- Une conséquence du point 2- est que l'état du ressort est caractérisé par la position et la vitesse de M. Nous verrons qu'en mécanique quantique un autre outil mathématique (la fonction d'onde) sera utilisé pour décrire une particule.

\* Notion d'énergie: on dit que l'interaction décrite par la force  $\vec{F} = F_x \vec{e}_x$  est associée à une énergie potentielle d'interaction  $V(x)$  (qui est une fonction de la position du point M) si

$F_x = -\frac{dV}{dx}$

Dans le cas particulier de l'oscillateur harmonique classique à une dimension

$-kx = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

(NB): on fait ici le choix  $V(x=0) = 0$  mais on pourrait très bien garder l'expression générale  $V(x) = \frac{1}{2} kx^2 + V(x=0)$  où  $V(x=0)$  est une constante. Le raisonnement qui suit serait le même.

\* D'après l'équation de Newton projetée sur l'axe des x,

$m\ddot{x} = F_x \Rightarrow m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = 0$   
 ↑ l'égalité est vérifiée à n'importe quel instant t

En multipliant par  $\dot{x}$  on obtient:

$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x} \frac{dV}{dx} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \right] + \frac{d}{dt} [V(x)] = 0$

on reconnaît ici l'énergie cinétique de M

de sorte que

$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$  est une quantité indépendante du temps que l'on appelle énergie et que l'on notera  $E$ .

$$\forall t \quad E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2} m [\dot{x}(0)]^2 + V(x(0))$$

\* Dans le cas du ressort

$$E = \frac{1}{2} m [\dot{x}(0)]^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 [x(0)]^2$$

Conclusion importante:

En mécanique classique, l'énergie est déterminée par la position initiale ET la vitesse initiale.

Ces quantités ayant a priori n'importe quelle valeur, l'énergie peut également prendre n'importe quelle valeur (elle est ici positive ou nulle). En d'autres termes, elle n'a pas des valeurs discrètes comme en mécanique quantique (nous reviendrons sur ce point). On obtient un continuum d'énergies pour le ressort classique.

\* Généralisation à 3 dimensions

On considère une particule  $M$  qui peut désormais se déplacer dans les trois directions d'espace  $x, y$  et  $z$ . La force  $F$  qui s'exerce sur  $M$  est associée à l'énergie potentielle d'interaction  $V(\vec{r})$  où  $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

3/10

Notation: soit  $U(\vec{r})$  une fonction de  $x, y, z$ . On définit le gradient de  $U$ , et on le note  $\vec{\nabla} U$ , comme suit

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

symbole "habla"      définition

D'après l'équation de Newton  $m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} V$

En faisant un produit scalaire avec  $\vec{v}$  on obtient:

$$m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} V = -\dot{x} \frac{\partial V}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial V}{\partial y} - \dot{z} \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{d}{dt} [V(x, y, z)]$$

De plus:

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\vec{v} \cdot \vec{v}] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [v^2]$$

$$\text{Ainsi: } \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m v^2 + V(x, y, z) \right] = 0$$

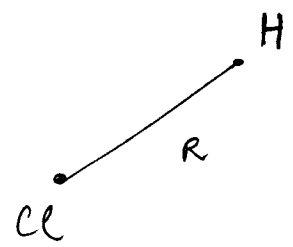
↓  
énergie cinétique

↓  
énergie potentielle

L'énergie totale  $E = \frac{1}{2} m v^2 + V$  est conservée dans ce cas.

Note: lien entre l'oscillateur harmonique et la vibration moléculaire

- Considérons l'exemple de la molécule HCl. Le chlore étant plus lourd que l'hydrogène on peut, en première approximation, considérer que Cl est fixe et H se déplace autour de Cl. On note R la distance H-Cl:



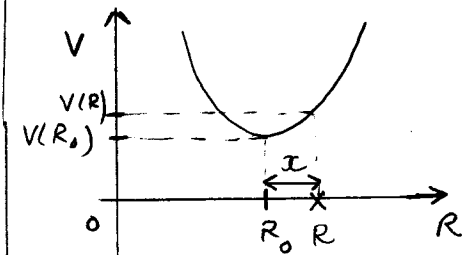
- Le mouvement de H est conditionné par:

① la répulsion entre les noyaux de Cl et H associée à l'énergie potentielle  $V_{NN}(R) = \frac{Z_{Cl} Z_H e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$   
 où  $Z_{Cl} = 17$  et  $Z_H = 1$ .

② L'attraction entre les noyaux (de H et Cl) et les électrons, la répulsion entre les électrons ainsi que l'énergie cinétique des électrons. On notera simplement  $E_{el}(R)$  la somme des énergies associées.

• Tout se passe comme si le noyau de H était soumis à une force dont l'énergie potentielle d'interaction est égale à  $V(R) = V_{NN}(R) + E_{el}(R)$

- Si V admet un minimum en  $R_0$ ,



on obtient, autour de  $R_0$ ,

$$V(R) = V(R_0) + \underbrace{\frac{dV}{dR}}_{=0} \Big|_{R=R_0} (R-R_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dR^2} \Big|_{R=R_0} (R-R_0)^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

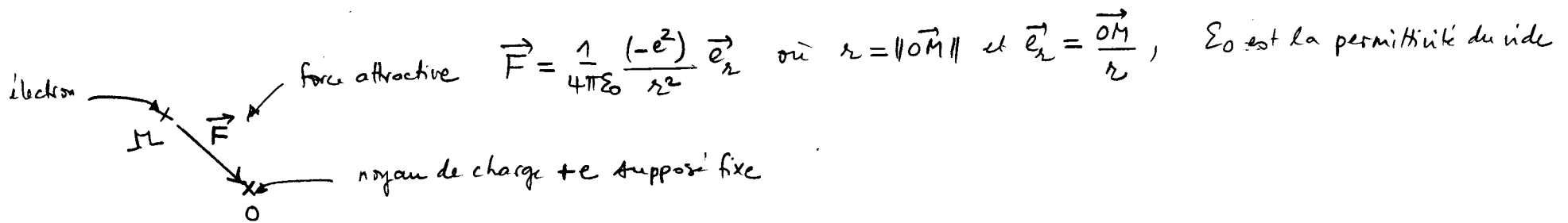
$$\Rightarrow V(R) \approx V(R_0) + \frac{1}{2} k x^2$$

où  $k = \frac{d^2V}{dR^2} \Big|_{R=R_0}$  ← Courbure de l'énergie potentielle totale V

On retrouve donc l'énergie potentielle d'un ressort.

- La distance R oscille autour de sa valeur d'équilibre  $R_0$
- En mécanique classique, l'énergie de vibration de HCl n'est pas quantifiée alors que l'expérience montre qu'elle l'est, que les niveaux d'énergie vibrationnels sont équidistants, et que l'écart énergétique entre deux niveaux successifs est proportionnel à  $\sqrt{R}$  (spectroscopie vibrationnelle).

\* 2nd exemple: atome d'hydrogène en mécanique classique



force attractive  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-e^2)}{r^2} \vec{e}_r$  où  $r = \|\vec{OM}\|$  et  $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$ ,  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide

• Énergie potentielle d'interaction:  $\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \vec{e}_x + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \vec{e}_y + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \vec{e}_z \right] = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$

puisque  $\begin{cases} \vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \vec{r} \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$

de sorte que  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$  avec  $V(x,y,z) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = V$

• Si l'on introduit le moment cinétique orbitaire  $\vec{L} = \vec{r} \wedge (m\vec{v})$ , on constate que  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge (m\vec{v})}_0 + \vec{r} \wedge \vec{F}$

Notation (juste pour être sûr...): Soient  $\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z$  et  $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$  deux vecteurs d'espace, leur produit vectoriel (qui est un vecteur) s'écrit  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (\vec{u} \wedge \vec{v})_x \vec{e}_x + (\vec{u} \wedge \vec{v})_y \vec{e}_y + (\vec{u} \wedge \vec{v})_z \vec{e}_z$

avec  $(\vec{u} \wedge \vec{v})_i = u_j v_k - u_k v_j$  où  $i, j, k$  est une permutation circulaire de  $x, y, z$ .

Par exemple  $(\vec{u} \wedge \vec{v})_z = u_x v_y - u_y v_x$

D'où  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \left( -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$ . Le moment cinétique orbitaire est donc conservé.

Soit  $\vec{L}_0$  sa valeur à l'instant  $t=0$  de sorte que  $\forall t$   $\vec{r} \wedge (m\vec{v}) = \vec{L}_0 \Rightarrow \forall t$   $\vec{r} \cdot \vec{L}_0 = 0$

$\swarrow$  dépendant du temps       $\downarrow$  dépendant du temps       $\uparrow$  indépendant du temps

L'électron se déplace donc, en mécanique classique, dans un plan orthogonal à  $\vec{L}_0$ .

• Considérons le cas simple où le mouvement est circulaire de rayon  $r_0$  dans le plan  $xOy$ :



$$\vec{r} = \vec{OM} = r_0 [\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y] \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r_0 \dot{\theta} [-\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y]$$

On note que  $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$  et  $\vec{L}_0 = r_0^2 m \dot{\theta} [\underbrace{\cos^2\theta \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y}_{\vec{e}_z} - \underbrace{\sin^2\theta \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x}_{-\vec{e}_z}] \Rightarrow \vec{L}_0 = r_0^2 m \dot{\theta} \vec{e}_z$

$\|\vec{L}_0\| = L_0 = r_0^2 m \dot{\theta}$  est constant donc la vitesse angulaire est constante

$$\dot{\theta} = \frac{L_0}{m r_0^2}$$

• L'accélération  $\vec{a}$  s'écrit donc  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r_0 \frac{d}{dt} [\dot{\theta}(-\sin\theta\vec{e}_z + \cos\theta\vec{e}_y)] = r_0[\dot{\theta}]^2 (-\cos\theta\vec{e}_z - \sin\theta\vec{e}_y)$

soit  $\vec{a} = r_0 \dot{\theta}^2 \left( -\frac{\vec{r}}{r_0} \right) = \boxed{-\dot{\theta}^2 \vec{r} = \vec{a}}$  independant  
du temps

• D'après l'équation de Newton  $m\vec{a} = -m\dot{\theta}^2\vec{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r_0^3} \Rightarrow \underbrace{mr_0^2\dot{\theta}^2}_{2(\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2)} = \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0}}_{-V}$  (Eq.(1))

• Cette relation entre énergie cinétique et énergie potentielle correspond au théorème du viriel (nous en reparlerons dans le cadre de la mécanique quantique)

• L'énergie totale (qui est conservée) s'écrit donc ici

$$E = \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 + V = -\frac{V}{2} + V = \frac{V}{2} = \boxed{-\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} = E}$$
 (Eq.(2))

Comme, d'après l'Eq.(1),  $L_0^2 = r_0^4 m^2 \dot{\theta}^2 = r_0^2 m \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot r_0$  (Eq.(2) bis)

on obtient l'expression équivalente

$$\boxed{E = -\frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{1}{L_0^2}}$$
 (Eq.(3))

Conclusion importante:

On voit dans l'Eq.(2) que l'énergie de l'atome d'hydrogène est, en mécanique classique, déterminée par le rayon  $r_0$  de l'orbite de l'électron ou, de manière équivalente (d'après l'Eq.(3)), par la norme au carré  $L_0^2$  du moment cinétique orbitalaire initial. Ces deux quantités varient a priori continûment sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  (dans la théorie non relativiste bien sûr...). Une fois de plus, l'ensemble des énergies possibles forme un continuum.

- Cette description classique de l'atome d'hydrogène est en contradiction totale avec l'expérience. On constate en effet que l'atome d'hydrogène a des énergies quantifiées, c'est à dire que son énergie prend des valeurs discrètes qui peuvent s'écrire  $E_n = -\frac{E_I}{n^2}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E_I$  correspond à l'énergie d'ionisation de l'atome. Cette expression permet de retrouver les raies de Balmer dans le spectre de l'hydrogène.

- Une solution empirique à ce problème a été proposée par Bohr. Elle consiste à postuler que seules les orbites circulaires pour lesquelles  $L_0$  est un multiple de  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  (où  $h$  est la constante de Planck dont nous reparlerons et  $\hbar = 1,054589(6) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ) sont des trajectoires possibles pour l'électron.

$$L_0 \rightarrow n\hbar, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{Eq. (4)})$$

D'après l'Eq. (3), l'énergie est donc quantifiée comme suit

$$E \rightarrow E_n = -\frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2}$$

de sorte que  $E_I = \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = \frac{1}{2} m\alpha^2 c^2 \approx 13,6 \text{ eV}$

Constante de structure fine au carré  
vitesse de la lumière dans le vide  
( $mc^2 \approx 0,511 \times 10^6 \text{ eV}$ )

- Les Eqs. (2) bis et (4) impliquent que le rayon de l'orbite est également quantifié dans le modèle de Bohr :

$$r_0 \rightarrow r_n = \frac{4\pi\epsilon_0}{me^2} (n\hbar)^2 = n^2 a_0 = r_n$$

$$\text{où } a_0 = \frac{\hbar}{mc} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar c}{e^2} = \frac{\hbar}{mc} \cdot \frac{1}{\alpha} \approx 0,529 \text{ \AA}$$

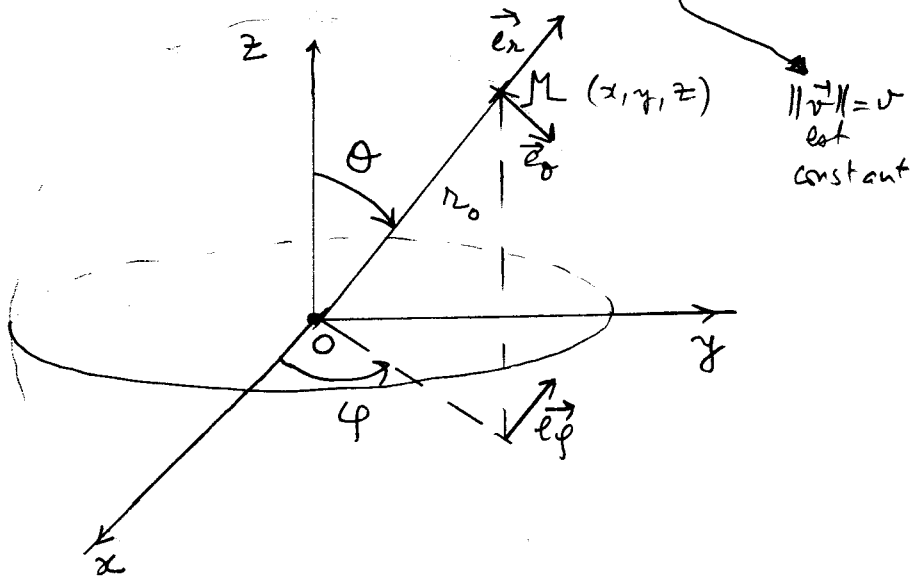
$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

- Le modèle de Bohr reproduit le spectre expérimental de l'hydrogène mais la quantification de  $L_0$  reste inexpliquée. La description de l'électron en termes de mécanique classique (trajectoires circulaires) est a priori en contradiction avec une quantification de l'énergie qui, comme nous le verrons, peut en revanche apparaître naturellement en mécanique ondulatoire.



\* 3<sup>ème</sup> exemple: le rotateur rigide.

On considère le mouvement uniforme d'une particule  $M$  de masse  $m$  sur une sphère de rayon  $r_0$



$$\vec{r} = r_0 \vec{e}_r, \quad d\vec{r} = r_0 d\theta \vec{e}_\theta + r_0 \sin\theta d\phi \vec{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r_0 [\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin\theta \vec{e}_\phi] \quad (*)$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$= m r_0^2 [\dot{\theta} \underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta}_{\vec{e}_\phi} + \dot{\phi} \sin\theta \underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\phi}_{-\vec{e}_\theta}]$$

$$\boxed{\vec{L} = m r_0^2 [\dot{\theta} \vec{e}_\phi - \dot{\phi} \sin\theta \vec{e}_\theta]} \quad (*)$$

L'énergie de la particule (qui n'est que cinétique) s'écrit (voir Eq. (5))

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{L^2}{m^2 r_0^2} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m r_0^2}$$

Conclusion importante: Pour une valeur fixée  $r_0$ , l'énergie de la particule peut a priori prendre n'importe quelle valeur puisque  $L$  prend n'importe quelle valeur (on ignore ici la relativité). Les valeurs possibles de l'énergie forment un continuum. Ce modèle pourrait être utilisé pour décrire la rotation des molécules (par exemple HCl). L'expérience montre que les niveaux d'énergie rotationnels d'une molécule sont quantifiés. Une solution empirique permettant d'éviter cette contradiction entre mécanique classique et expérience consiste à supposer que  $L^2$  est quantifié comme suit

$$L^2 \rightarrow l(l+1)\hbar^2 \quad l \in \mathbb{N}$$

de sorte que

$$E \rightarrow E_l = \frac{1}{2} \frac{(l+1)l\hbar^2}{m r_0^2}$$

(\*) Voir complément

•  $\forall t \quad x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2 \leftarrow$  indépendant du temps

En dérivant par rapport au temps on obtient:

$$2\dot{x}x + 2\dot{y}y + 2\dot{z}z = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{r} = 0 \quad \text{sur } \vec{r} = 0M$$

• La norme du moment cinétique orbitaire  $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$  vaut donc  $\|\vec{L}\| = L = \|\vec{r}\| \times m v = m r_0 v$  (Eq. 5)

• À noter une différence importante avec l'atome d'hydrogène: le vecteur  $\vec{L}$  n'est a priori pas constant (il change de direction au cours du temps). Seule sa norme  $L$  l'est puisque  $v$  est constant.

L'écart énergétique entre deux niveaux rotationnels successifs vaut donc

$$\Delta E_L = E_{l+1} - E_l = \frac{\hbar^2}{2m r_0^2} [(l+2)(l+1) - (l+1)l]$$

$$= \frac{\hbar^2}{m r_0^2} (l+1)$$

En posant  $B = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m r_0^2}$  il vient  $\Delta E_L = 2B(l+1)$

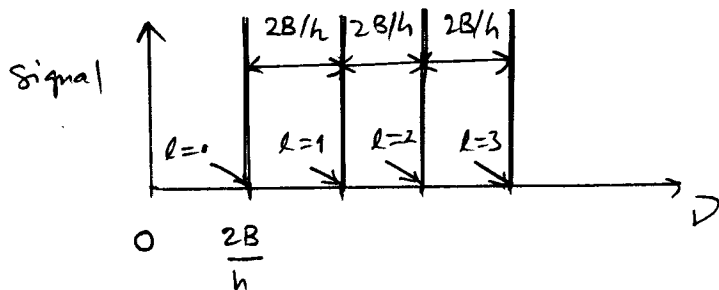
Les fréquences  $\nu_l$  permettant la transition entre deux niveaux rotationnels successifs vaut donc

$$h\nu_l = \Delta E_L = 2B(l+1)$$

$$\Rightarrow \nu_l = \frac{2B}{h} (l+1)$$

L'écart en fréquence entre deux pics d'absorption est donc constant dans le spectre rotationnel

$$\Delta \nu_l = \nu_{l+1} - \nu_l = \frac{2B}{h}$$



Problème posé par ce modèle :

la quantification de  $L^2$  ne peut s'expliquer dans le cadre de la mécanique classique. Elle apparaît naturellement en mécanique quantique.

\* Complément: le rotateur rigide.

$$\vec{v} = r_0 [\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi]$$

Le mouvement de  $\Omega$  est supposé uniforme donc

$$v^2 = r_0^2 [\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta] \text{ est constant}$$

Supposons que  $\theta(t) = \omega_0 t \rightarrow \dot{\theta} = \omega_0 \leftarrow$  vitesse angulaire associée à  $\theta$  constante

$$\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta = \frac{v^2}{r_0^2} - \omega_0^2 \leftarrow \text{Constant} \quad \text{Eq. (6)}$$

Si  $\dot{\varphi} > 0$  et  $\theta \in [0, \pi]$

$$\dot{\varphi} \sin \theta = \left( \frac{v^2}{r_0^2} - \omega_0^2 \right)^{1/2}$$

$$\text{et } \vec{L} = m r_0^2 \left[ \omega_0 \vec{e}_\varphi - \sqrt{\frac{v^2}{r_0^2} - \omega_0^2} \vec{e}_\theta \right] \quad \text{Eq. (7)}$$

Il suffit donc d'étudier le mouvement des vecteurs  $\vec{e}_\varphi$  et  $\vec{e}_\theta$  pour voir que  $\vec{L}$  change d'orientation en conservant la même norme au carré  $L^2 = [m r_0^2]^2 \left[ \omega_0^2 + \frac{v^2}{r_0^2} - \omega_0^2 \right] = m^2 r_0^2 v^2$

Si  $\varphi(t=0) = 0$ , à  $t=0$   $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_y$  et  $\vec{e}_\theta = \vec{e}_x$

$$\Rightarrow \vec{L}(t=0) = m r_0^2 \left[ \omega_0 \vec{e}_y - \sqrt{\frac{v^2}{r_0^2} - \omega_0^2} \vec{e}_x \right]$$

à  $t = \frac{\pi}{2\omega_0} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \vec{e}'_\theta = -\vec{e}_z$  10/MC

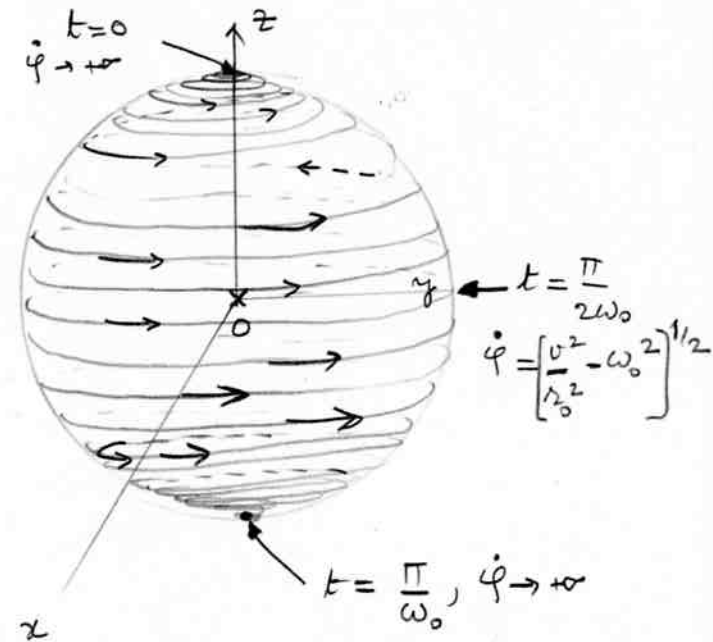
et  $\vec{e}'_\varphi$  appartient au plan  $xoy$

$$\vec{L}(t = \frac{\pi}{2\omega_0}) = m r_0^2 \left[ \omega_0 \vec{e}'_\varphi + \sqrt{\frac{v^2}{r_0^2} - \omega_0^2} \vec{e}'_\theta \right]$$

$\vec{L}$  a ici une composante suivant l'axe des  $z$  (ce n'était pas le cas à  $t=0$ )

D'après l'Eq. 6, lorsque  $\sin^2 \theta \rightarrow 0$   
 $\dot{\varphi}^2 \rightarrow +\infty$  et  $\dot{\varphi}^2$  est minimal lorsque  $\sin^2 \theta$  est maximal c'est à dire pour  $\theta = \frac{\pi}{2} + p\pi$   
 $p \in \mathbb{N}$

On peut ainsi représenter la trajectoire de  $\Omega$  comme suit



• Si  $\omega_0 = 0$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , il vient de l'Eq.(7)

$$\vec{L} = m r_0^2 \times \left(-\frac{v}{r_0}\right) (-\vec{e}_z) = \underbrace{m r_0 v}_{L_0} \vec{e}_z$$

On retrouve le mouvement plan décrit précédemment pour l'électron dans l'atome d'hydrogène.