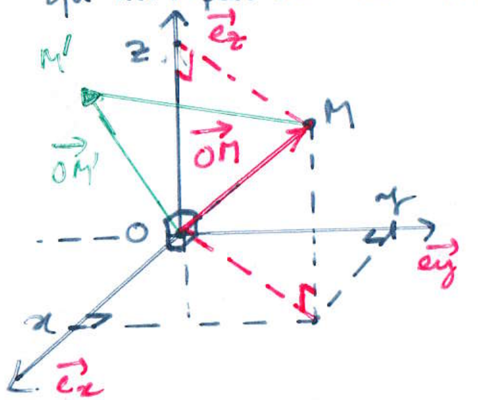
Vecteurs, produit scalaire et produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

I. $\mathbb{R}^3$: espace réel de dimension 3

- Un élément de $\mathbb{R}^3$ peut être noté (x, y, z) où x, y et z sont des nombres réels.

- Il peut être associé à un point M, une fois qu'un repère dit cartésien d'origine O est défini.



O est associé à $(0,0,0)$ $\downarrow$ zéro !

M est associé à (x, y, z)

- Une autre façon de placer M consiste à définir le vecteur $\vec{OM}$ comme suit

$$\boxed{\vec{OM} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y} + z\,\vec{e_z}}$$

où $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ est la base du repère cartésien.

Dans cette base, le vecteur $\vec{OM}$ est représenté par le vecteur colonne $\underline{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $\longleftarrow$ notation !

- Notons que $\underline{e_x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e_y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\underline{e_z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Soit M' un autre point associé à (x', y', z')

$$\vec{OM'} = x'\,\vec{e_x} + y'\,\vec{e_y} + z'\,\vec{e_z}$$ de sorte que

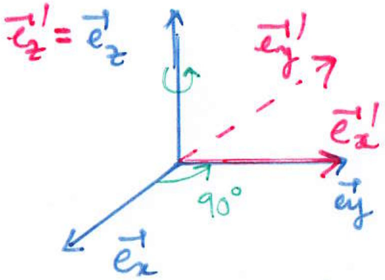
$$\vec{MM'} = \vec{MO} + \vec{OM'} = -\vec{OM} + \vec{OM'}$$
$$= (x'-x)\,\vec{e_x} + (y'-y)\,\vec{e_y} + (z'-z)\,\vec{e_z}.$$

Il vient $$\boxed{\underline{MM'} = \begin{bmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{bmatrix}}$$

II. Bases et représentations

- Précisons tout d'abord que, une fois une base cartésienne $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$ définie, on peut écrire un vecteur $\vec{u} = u_x\,\vec{e_x} + u_y\,\vec{e_y} + u_z\,\vec{e_z}$ dans cette base sans avoir à préciser que $\vec{u}$ relie un point A à un point B, ce qui reviendrait à dire que $\vec{u} = \vec{AB}$. Les nombres réels u_x, u_y et u_z suffisent à définir $\vec{u}$. Dans la base cartésienne choisie, $\vec{u}$ est représenté par $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$

- Changement de base : on considère une nouvelle base définie comme suit par rapport à la base initiale,
$$\vec{e_x'} = \vec{e_y}, \quad \vec{e_y'} = -\vec{e_x}, \quad \vec{e_z'} = \vec{e_z}.$$



Ce changement de base correspond à une rotation de 90° autour de $\vec{e_z}$. Dans la nouvelle base, le vecteur $\vec{u}$ s'écrit

$$\vec{u} = u_x \vec{e_x} + u_y \vec{e_y} + u_z \vec{e_z}$$
$$= -u_x \vec{e_y}' + u_y \vec{e_x}' + u_z \vec{e_z}'$$

soit $\vec{u} = u_y \vec{e_x}' - u_x \vec{e_y}' + u_z \vec{e_z}'$.

$\vec{u}$ est donc représenté dans la nouvelle base par

$$\underline{u}' = \begin{bmatrix} u_y \\ -u_x \\ u_z \end{bmatrix}$$

Conclusion : La représentation dépend de la base. Les deux représentations sont différentes mais elles correspondent au même vecteur $\vec{u}$. Il est essentiel de préciser la base considérée lorsque l'on écrit la représentation d'un vecteur.

III – Produit scalaire, norme et angle

• Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Leur produit scalaire, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est un nombre réel

• Par définition, une base cartésienne est telle que

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e_x} \cdot \vec{e_x} &= \vec{e_y} \cdot \vec{e_y} = \vec{e_z} \cdot \vec{e_z} = 1 \\ \vec{e_x} \cdot \vec{e_y} &= \vec{e_x} \cdot \vec{e_z} = \vec{e_y} \cdot \vec{e_z} = 0 \end{aligned}}$$

• Propriétés du produit scalaire :

par définition le produit scalaire est symétrique, soit $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, et linéaire, soit

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) & \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{cases}$$

• Si $\begin{cases} \vec{u} = u_x \vec{e_x} + u_y \vec{e_y} + u_z \vec{e_z} \\ \vec{v} = v_x \vec{e_x} + v_y \vec{e_y} + v_z \vec{e_z} \end{cases}$

alors, d'après ce qui précède,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \underbrace{\vec{e_x} \cdot \vec{v}}_{v_x} + u_y \underbrace{\vec{e_y} \cdot \vec{v}}_{v_y} + u_z \underbrace{\vec{e_z} \cdot \vec{v}}_{v_z}$$

soit $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}$

• Norme d'un vecteur : $\underbrace{\|\vec{u}\|}_{\text{notation !}} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

Notons que $\vec{u} \cdot \vec{u} = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \geq 0$

La norme est donc bien définie. De plus, $\|\vec{u}\| = 0$

$\rightarrow u_x = 0,\ u_y = 0$ et $u_z = 0 \rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Ainsi $\boxed{\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0}$

• si $\vec{u} = \vec{OM}$ alors $\|\vec{u}\| = \|\vec{OM}\| = OM$ correspond à la distance OM soit $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

- Notons que si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors

$\|\alpha\vec{u}\| = \sqrt{\alpha\vec{u}.\alpha\vec{u}} = \sqrt{\alpha^2\vec{u}.\vec{u}} = |\alpha|\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

soit $\boxed{\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\,\|\vec{u}\|}$

Commentaire: $|\alpha|$ est la valeur absolue de α

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \geqslant 0 \\ -\alpha & \text{si } \alpha \leqslant 0 \end{cases}$$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\vec{u}.\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

Preuve: Soit $f(t) = \|\vec{u} + t\vec{v}\|^2$ où $t \in \mathbb{R}$

Par définition $f(t) \geqslant 0 \quad \forall t$

or $f(t) = (\vec{u} + t\vec{v}).(\vec{u} + t\vec{v})$
$= \|\vec{u}\|^2 + 2t\,\vec{u}.\vec{v} + t^2\|\vec{v}\|^2$

si $\vec{v} = \vec{0}$ l'inégalité est satisfaite. Sinon,

$$f(t) = \|\vec{v}\|^2\left(t^2 + 2t\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} + \frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{v}\|^2}\right)$$

$$= \|\vec{v}\|^2\left[\left(t + \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)^2 - \frac{(\vec{u}.\vec{v})^2}{\|\vec{v}\|^4} + \frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{v}\|^2}\right]$$

si $t = -\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} = t_0$ alors $f(t_0) = \|\vec{u}\|^2 - \frac{(\vec{u}.\vec{v})^2}{\|\vec{v}\|^2} \geqslant 0$

soit $(\vec{u}.\vec{v})^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \rightarrow \sqrt{(\vec{u}.\vec{v})^2} \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

ou encore $|\vec{u}.\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

- Angle entre deux vecteurs : on définit l'angle α entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en écrivant leur produit scalaire sous la forme

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha}$$

Notons que cet définition est en accord avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet $\underbrace{|\vec{u}.\vec{v}| - \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}_{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\underbrace{(|\cos\alpha| - 1)}_{\leqslant 0}} \leqslant 0$

soit $|\cos\alpha| < 1 \longleftarrow$ Correct!

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\alpha = 90°$

soit $\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

IV - Produit vectoriel

- Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Leur produit vectoriel, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est par définition un vecteur.
- Le produit vectoriel est linéaire, soit

$\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

et anti-symétrique, soit $\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}}$ (1)

- Une conséquence importante de l'équation (1) est que, si $\vec{v} = \vec{u}$, alors

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{u} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{u} \wedge \vec{u} = 0}$$

- Par définition, une base cartésienne est telle que

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e_x} \wedge \vec{e_y} &= \vec{e_z} \\ \vec{e_y} \wedge \vec{e_z} &= \vec{e_x} \\ \vec{e_z} \wedge \vec{e_x} &= \vec{e_y} \end{aligned}}$$

Comme $\vec{u} = u_x \vec{e_x} + u_y \vec{e_y} + u_z \vec{e_z}$ et $\vec{v} = v_x \vec{e_x} + v_y \vec{e_y} + v_z \vec{e_z}$

il vient $\vec{u} \wedge \vec{v} = v_x \underbrace{\vec{u} \wedge \vec{e_x}} + v_y \underbrace{\vec{u} \wedge \vec{e_y}} + v_z \underbrace{\vec{u} \wedge \vec{e_z}}$

$$-\vec{e_x} \wedge \vec{u} = -u_x \vec{e_x} \wedge \vec{e_x} = \vec{0} \; - u_y \vec{e_x} \wedge \vec{e_y} - u_z \vec{e_x} \wedge \vec{e_z}$$

$$-\vec{e_y} \wedge \vec{u} = -u_x \vec{e_y} \wedge \vec{e_x} - u_y \vec{e_y} \wedge \vec{e_y} = \vec{0} \; - u_z \vec{e_y} \wedge \vec{e_z}$$

$$-\vec{e_z} \wedge \vec{u} = -u_x \vec{e_z} \wedge \vec{e_x} - u_y \vec{e_z} \wedge \vec{e_y} - u_z \vec{e_z} \wedge \vec{e_z} = \vec{0}$$

Soit $\vec{u} \wedge \vec{v} = -v_x u_y \underbrace{\vec{e_x} \wedge \vec{e_y}}_{\vec{e_z}} - v_x u_z \underbrace{\vec{e_x} \wedge \vec{e_z}}_{-\vec{e_y}} - v_y u_x \underbrace{\vec{e_y} \wedge \vec{e_x}}_{-\vec{e_z}} - v_y u_z \underbrace{\vec{e_y} \wedge \vec{e_z}}_{\vec{e_x}} - v_z u_x \underbrace{\vec{e_z} \wedge \vec{e_x}}_{\vec{e_y}} - v_z u_y \underbrace{\vec{e_z} \wedge \vec{e_y}}_{-\vec{e_x}}$

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \left[u_y v_z - u_z v_y\right] \vec{e_x} + \left[u_z v_x - u_x v_z\right] \vec{e_y} + \left[u_x v_y - u_y v_x\right] \vec{e_z}}$$

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est donc représenté comme suit dans la base cartésienne $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$:

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \\ u_x \\ u_y \end{array} \wedge \begin{array}{c} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \\ v_x \\ v_y \end{array}$$

moyen mémotechnique !

- Propriété importante : $\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \text{ et } \vec{v}.}$

Preuve :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = (u_y v_z - u_z v_y) u_x + (u_z v_x - u_x v_z) u_y + (u_x v_y - u_y v_x) u_z = 0$$

et

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y) v_x + (u_z v_x - u_x v_z) v_y + (u_x v_y - u_y v_x) v_z = 0$$

- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = (u_y v_z - u_z v_y)^2 + (u_z v_x - u_x v_z)^2 + (u_x v_y - u_y v_x)^2$

$$= u_y^2 v_z^2 + u_z^2 v_y^2 - 2 u_y v_z u_z v_y + u_z^2 v_x^2 + u_x^2 v_z^2 - 2 u_z v_x u_x v_z + u_x^2 v_y^2 + u_y^2 v_x^2 - 2 u_x v_y u_y v_x$$

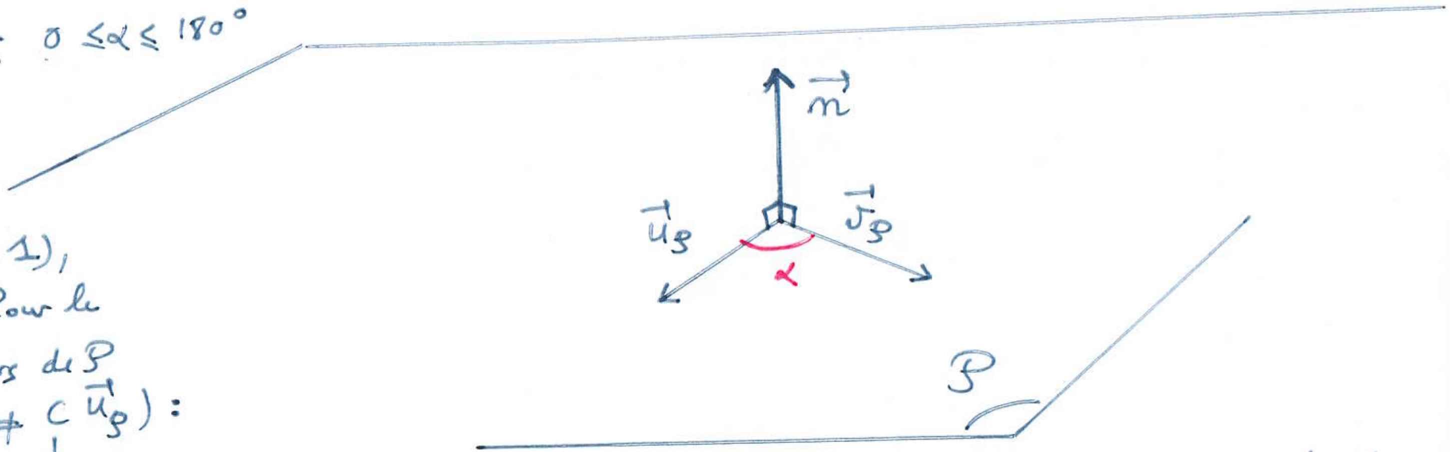
$$= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - u_x^2 v_x^2 - u_y^2 v_y^2 - u_z^2 v_z^2 - 2 u_y v_z u_z v_y - 2 u_z v_x u_x v_z$$
$$- 2 u_x v_y u_y v_x$$

$$= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$$

puisque $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)(u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)$
$= u_x^2 v_x^2 + u_y^2 v_y^2 + u_z^2 v_z^2 + 2 u_x v_x u_y v_y + 2 u_x v_x u_z v_z + 2 u_y v_y u_z v_z$

Ainsi $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \underbrace{(1 - \cos^2\alpha)}_{\sin^2\alpha}$ où α est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \underbrace{|\sin\alpha|}_{\sin\alpha}} \quad \text{si } 0 \leq \alpha \leq 180°$$



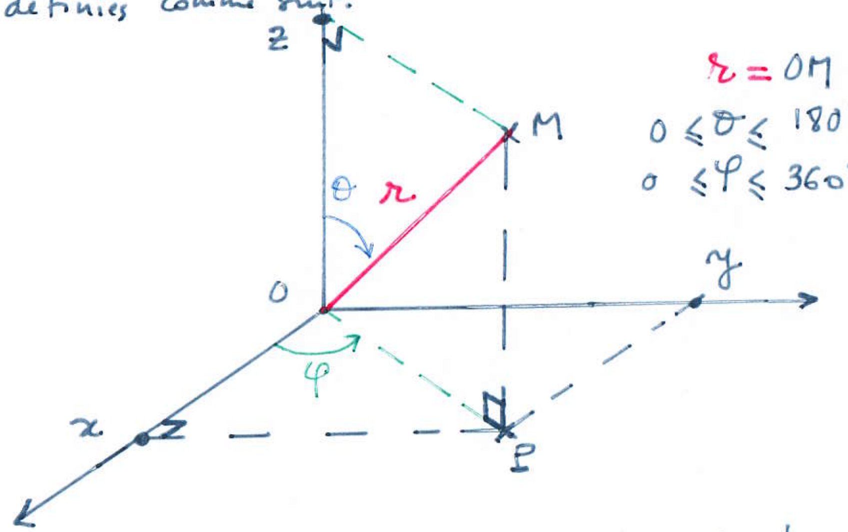
- Vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$: il s'agit d'un vecteur souvent normé (c'est-à-dire de norme 1), noté $\vec{n}$, qui est perpendiculaire à $\mathcal{P}$. Pour le construire, il suffit de prendre deux vecteurs de $\mathcal{P}$ non colinéaires (soit $\vec{v}_{\mathcal{P}} \neq c\, \vec{u}_{\mathcal{P}}$, c constante) : $\vec{u}_{\mathcal{P}}$ et $\vec{v}_{\mathcal{P}}$

$$\boxed{\vec{n} = \frac{\vec{u}_{\mathcal{P}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{P}}}{\|\vec{u}_{\mathcal{P}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{P}}\|}}$$

Remarques :
(1) Si $\vec{v}_{\mathcal{P}}$ et $\vec{u}_{\mathcal{P}}$ sont colinéaires alors $\vec{u}_{\mathcal{P}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{P}} = c\, \vec{u}_{\mathcal{P}} \wedge \vec{u}_{\mathcal{P}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{n} = \vec{0}$ (absurde!)
(2) On vérifie bien que $\|\vec{n}\| = \dfrac{\|\vec{u}_{\mathcal{P}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{P}}\|}{\|\vec{u}_{\mathcal{P}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{P}}\|} = 1.$

V - Cordonnées sphériques

- Pour repérer un point M dans l'espace, on peut utiliser, comme alternative aux cordonnées cartésiennes (x, y, z), les cordonnées dites sphériques (r, θ, φ) définies comme suit :



$r = OM$

$0 \leq \theta \leq 180°$

$0 \leq \varphi \leq 360°$

- On passe des cordonnées sphériques aux cordonnées cartésiennes en utilisant les relations suivantes :

$\cos\theta = \frac{z}{r} \Rightarrow \boxed{z = r\cos\theta}$

$\cos\varphi = \frac{x}{OP}$ avec $\sin\theta = \frac{OP}{r}$

$\sin\varphi = \frac{y}{OP}$

Ainsi $\boxed{x = r\sin\theta\cos\varphi}$

$\boxed{y = r\sin\theta\sin\varphi}$