Algèbre des matrices réelles

I – Introduction au concept de matrice

- Plaçons nous dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$ une base cartésienne et $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ deux vecteurs se décomposant comme suit dans cette base,

$$\vec{u} = u_x \vec{e_x} + u_y \vec{e_y}$$
$$\vec{v} = v_x \vec{e_x} + v_y \vec{e_y}$$

- $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$ et $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$ sont des vecteurs colonne que l'on peut aussi appeler matrices à 2 lignes et 1 colonne

- $\underline{u}$ et $\underline{v}$ peuvent être utilisés pour construire une matrice à deux lignes et deux colonnes :

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{notation}}}{\underline{\underline{C}}} = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

- On dira que $\underline{\underline{C}}$ est une "matrice 2×2" → nombre de colonnes

nombre de lignes

- On souhaite savoir si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peuvent être utilisés comme base (au lieu de $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$). Cela n'est possible que si ils sont linéairement indépendants, autrement dit,

si $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ alors $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

$$\begin{cases} \alpha u_x + \beta v_x = 0 \\ \alpha u_y + \beta v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha u_x v_y + \beta v_x v_y = 0 & (1) \\ \alpha u_y v_x + \beta v_x v_y = 0 & (2) \\ \alpha u_x u_y + \beta v_x u_y = 0 & (3) \\ \alpha u_x u_y + \beta v_y u_x = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow \boxed{\alpha(u_x v_y - u_y v_x) = 0}$$
$$(4) - (3) \Rightarrow \boxed{\beta(u_x v_y - u_y v_x) = 0}$$

Conclusion : si $u_x v_y - u_y v_x$ est nul, il n'y a aucune raison d'avoir $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. En revanche, si $u_x v_y - u_y v_x \neq 0$, on obtient automatiquement $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

(*) voir complément p6/M

- Définition :

$$\boxed{D(\underline{\underline{C}}) = C_{11} C_{22} - C_{21} C_{12}} = u_x v_y - u_y v_x$$

déterminant de la matrice $\underline{\underline{C}}$.

- Notation : $D(\underline{\underline{C}}) = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}$

- Produit d'une matrice par un vecteur colonne :

Soit $\underline{X} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$. En définissant le produit de $\underline{\underline{C}}$ par $\underline{X}$ comme suit,

$$\underline{\underline{C}}\,\underline{X} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11}\alpha + C_{12}\beta \\ C_{21}\alpha + C_{22}\beta \end{bmatrix}}_{}\,,$$

$\underline{\underline{C}}$: matrice 2 lignes et 2 colonnes

$\underline{X}$: matrice 2 lignes et 1e colonne

matrice 2 lignes et 1e colonne

on peut ainsi réécrire l'équation $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ sous forme matricielle

$$\boxed{\underline{\underline{C}}\,\underline{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad (4)\text{ bis}$$

- Produit de deux matrices 2X2 :

Soient $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ et $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$.

On note $\underline{Y} = \underline{\underline{B}}\,\underline{X}$ et $\underline{Z} = \underline{\underline{A}}\,\underline{Y}$

D'après le paragraphe précédent,

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} B_{11}\alpha + B_{12}\beta \\ B_{21}\alpha + B_{22}\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} A_{11}\gamma + A_{12}\delta \\ A_{21}\gamma + A_{22}\delta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}(B_{11}\alpha + B_{12}\beta) + A_{12}(B_{21}\alpha + B_{22}\beta) \\ A_{21}(B_{11}\alpha + B_{12}\beta) + A_{22}(B_{21}\alpha + B_{22}\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} M_{11}\alpha + M_{12}\beta \\ M_{21}\alpha + M_{22}\beta \end{bmatrix}$$

où

$$\boxed{\begin{aligned} M_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ M_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ M_{21} &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \\ M_{22} &= A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{aligned}} \quad (5)$$

Ainsi $\underline{Z} = \underline{\underline{M}}\,\underline{X} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{X}$

Les relations (5) permettent ainsi de définir le produit de deux matrices 2x2.

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}.$$

• Deux nombres réels α et β commutent toujours :

$$\alpha\beta = \beta\alpha .$$

Ce n'est en revanche pas toujours le cas pour les matrices.

Exemple : si $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$

• Relation importante : $$\boxed{D(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = D(\underline{\underline{A}})\,D(\underline{\underline{B}}) = D(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})} \quad (6)$$

Preuve :

$$D(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = D(\underline{\underline{M}}) = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} = M_{11}M_{22} - M_{21}M_{12}$$

soit $D(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21})(A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) - (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21})(A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22})$

$$= \underbrace{A_{11}B_{11}A_{22}B_{22}} + \cancel{A_{11}B_{11}A_{21}B_{12}} + \underbrace{A_{12}B_{21}A_{21}B_{12}} + \cancel{A_{12}B_{21}A_{22}B_{22}}$$

$$- \cancel{A_{21}B_{11}A_{11}B_{12}} - \underbrace{A_{21}B_{11}A_{12}B_{22}} - \underbrace{A_{22}B_{21}A_{11}B_{12}} - \cancel{A_{22}B_{21}A_{12}B_{22}}$$

$$= (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})B_{11}B_{22} - (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})B_{21}B_{12}$$

$$D(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \underbrace{(A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})}_{D(\underline{\underline{A}})}\underbrace{(B_{11}B_{22} - B_{21}B_{12})}_{D(\underline{\underline{B}})}$$

Preuve (suite) :

$$D(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = D(\underline{\underline{A}})\,D(\underline{\underline{B}}) = D(\underline{\underline{B}})\,D(\underline{\underline{A}}) = D(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})$$

• Produit d'une matrice par un nombre réel ξ :

$$\underline{\underline{B}}(\xi\underline{X}) = (\xi\underline{\underline{B}})\underline{X} \quad \text{où}$$

$$\xi\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \xi B_{11} & \xi B_{12} \\ \xi B_{21} & \xi B_{22} \end{bmatrix}$$

• Somme de deux matrices :

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X} + \underline{\underline{B}}\,\underline{X} = (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{X}$$

où

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}$$

- Inverse d'une matrice :

Soit $\underline{\underline{B}}$ une matrice 2x2. On cherche la matrice $\underline{\underline{A}}$ telle que $\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}}\ \underline{X}\right) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{X} = \underline{X}$.

Si $D(\underline{\underline{B}}) \neq 0$, on peut construire

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{D(\underline{\underline{B}})}\begin{bmatrix} B_{22} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{11} \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \frac{1}{D(\underline{\underline{B}})}\begin{bmatrix} B_{22} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{D(\underline{\underline{B}})}\begin{bmatrix} D(\underline{\underline{B}}) & 0 \\ 0 & D(\underline{\underline{B}}) \end{bmatrix} = \underline{\underline{E}}$$

où $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

matrice identité

De même $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \frac{1}{D(\underline{\underline{B}})}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{22} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{11} \end{bmatrix} = \underline{\underline{E}}$

Conclusion : $\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}}$

(*) Commentaire (voir p 6/M)

On notera ainsi $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}^{-1}$ ← inverse de $\underline{\underline{B}}$

Notons que $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{X} = \underline{\underline{E}}\,\underline{X} = \underline{X}$ ← ce que nous voulions !

Si $D(\underline{\underline{B}}) = 0$, on dira tout simplement que $\underline{\underline{B}}^{-1}$ n'existe pas, c'est-à-dire que $\underline{\underline{B}}$ n'est pas inversible.

- Notons également que $D(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}^{-1}) = D(\underline{\underline{E}}) = 1 = D(\underline{\underline{B}}) \times D(\underline{\underline{B}}^{-1})$ → $\boxed{D(\underline{\underline{B}}^{-1}) = \frac{1}{D(\underline{\underline{B}})}}$

- Transposée d'un vecteur colonne :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y = \underbrace{\begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}}_{\underline{u}^T}\underbrace{\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}}_{\underline{v}}$$

"transposée de $\underline{u}$"

$\underline{u}^T\underline{v}$ est une matrice à 1 ligne et 1 colonne : c'est donc un nombre réel.

- Transposée d'une matrice 2x2 : Soit $\underline{\underline{A}}$ une matrice 2x2.

On note $\underline{w} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}$ et $\vec{w} = w_x\vec{e_x} + w_y\vec{e_y}$

Par définition, la transposée de $\underline{\underline{A}}$, notée $\underline{\underline{A}}^T$, est la matrice telle que

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = \underline{u}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{v} \underset{\text{définition !}}{=} \left(\underline{\underline{A}}^T\underline{u}\right)^T\underline{v}$$ quelque soient $\underline{u}$ et $\underline{v}$.

On vérifie que $\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$.

En effet

$$\underline{u}^T \underline{\underline{A}} = [u_x \ \ u_y] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = [u_x A_{11} + u_y A_{21} \quad u_x A_{12} + u_y A_{22}]$$

$$= \begin{bmatrix} u_x A_{11} + u_y A_{21} \\ u_x A_{12} + u_y A_{22} \end{bmatrix}^T$$

$$\underline{u}^T \underline{\underline{A}} = \Big(\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^T} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \Big)^T$$

- $\boxed{\text{Notons que } (\underline{\underline{A}}^T)^T = \underline{\underline{A}}}$

- $\underline{\underline{A}}$ est dite symétrique si $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$.

- Notons que, dans le cas général,

$$D(\underline{\underline{A}}^T) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

Soit $\boxed{D(\underline{\underline{A}}^T) = D(\underline{\underline{A}})}$

- $\underline{u}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{B}}\, \underline{v} = (\underline{\underline{A}}^T \underline{u})^T \underline{\underline{B}}\, \underline{v} = (\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{u})^T \underline{v}$

de sorte que $\boxed{(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T}$

- Revenons à la matrice $\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}$ introduite page 1/M. Pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base orthonormée il faut

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}.\vec{u} &= u_x^2 + u_y^2 = 1 \\ \vec{v}.\vec{v} &= v_x^2 + v_y^2 = 1 \\ \text{et} \quad \vec{u}.\vec{v} &= u_x v_x + u_y v_y = 0 \end{aligned}\right\}$$

Ces 3 conditions peuvent s'écrire de manière compacte comme suit

$$\boxed{\underbrace{\underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{C}}^T = \underline{\underline{E}}} \qquad (7)$$

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x^2 + u_y^2 & u_x v_x + u_y v_y \\ u_x v_x + u_y v_y & v_x^2 + v_y^2 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, toute matrice $\underline{\underline{C}}$ vérifiant la condition (7) sera dite orthonormée. Dans ce cas $\underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{C}}^T$

Remarque: si $\underline{\underline{C}}$ est orthonormée alors

$$D(\underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{C}}) = D(\underline{\underline{E}}) = 1$$
$$= D(\underline{\underline{C}}^T)\, D(\underline{\underline{C}}) = D(\underline{\underline{C}})\, D(\underline{\underline{C}})$$

soit $\boxed{(D(\underline{\underline{C}}))^2 = 1}$

(*) **Commentaire:** L'équation (4) bis s'écrit simplement, si $D(\underline{\underline{C}}) \neq 0$, sous la forme

$$\underbrace{\underline{\underline{C}}^{-1}\,\underline{\underline{C}}}_{\underline{\underline{E}}}\,\underline{X} = \underline{\underline{C}}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \underset{\text{notation}}{=} \underline{0}$$

d'où $\underline{X} = \underline{0} \Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est bien un système de vecteurs linéairement indépendants.

(*) **Complément:** si $D(\underline{\underline{C}}) = u_x v_y - u_y v_x = 0$

- on vérifie que $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ n'est pas la seule solution. En effet, si on pose $\alpha' = v_y$ et $\beta' = -u_y$,

on voit que $\begin{cases} \alpha' u_x + \beta' v_x = v_y u_x - u_y v_x = 0 \\ \alpha' u_y + \beta' v_y = v_y u_y - v_y u_y = 0 \end{cases}$

Notons que si $\alpha' = \beta' = 0$ alors $\vec{u} = u_x \vec{e_x}$ et $\vec{v} = v_x \vec{e_x}$ (avec $u_x \neq 0$, $v_x \neq 0$)

$\Rightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Rightarrow$ ils sont linéairement dépendants.

- Une autre solution est $\alpha'' = -v_x$ et $\beta'' = u_x$. En effet

$$\begin{cases} \alpha'' u_x + \beta'' v_x = -v_x u_x + u_x v_x = 0 \\ \alpha'' u_y + \beta'' v_y = -u_y v_x + u_x v_y = 0 \end{cases}$$

Si $\alpha'' = \beta'' = 0$ alors $\vec{u} = u_y \vec{e_y}$ et $\vec{v} = v_y \vec{e_y}$ $\Rightarrow$ linéairement dépendants.