Algèbre des matrices réelles

II. Généralisation à des dimensions quelconques

- Soit $\underline{\underline{A}}$ une matrice à M lignes et N colonnes :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\,N-1} & A_{1N} \\ A_{21} & & & \vdots & A_{2N} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ A_{M-1\,1} & & & & A_{M-1\,N} \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{M\,N-1} & A_{MN} \end{bmatrix}$$

- On dit que $\underline{\underline{A}}$ est une matrice carrée d'ordre N lorsque $M = N$. Elle est alors de dimension $N \times N$.

- Par définition, le déterminant de $\underline{\underline{A}}$, noté $D(\underline{\underline{A}})$, est nul si $\underline{\underline{A}}$ n'est pas une matrice carrée.

- Calcul du déterminant d'une matrice carrée :

① choisir une ligne ou une colonne suivant laquelle le déterminant sera développé.

② Si l'on choisit la ligne i alors

$$D(\underline{\underline{A}}) = \sum_{k=1}^{N} A_{ik} \times (-1)^{i+k}\, D(\underline{\underline{A}}^{ik}) \qquad (1)$$

notation !

matrice $\underline{\underline{A}}$ dont on a supprimé la ligne i et la colonne k $\Longrightarrow$ $\underline{\underline{A}}^{ik}$ est une matrice carrée d'ordre $(N-1)$

③ Si l'on choisit la colonne j alors

$$D(\underline{\underline{A}}) = \sum_{k=1}^{N} A_{kj} \times (-1)^{k+j} \times D(\underline{\underline{A}}^{kj}) \qquad (2)$$

Remarque : le calcul du déterminant se fait de manière itérative. $D(\underline{\underline{A}}^{ik})$ ou $D(\underline{\underline{A}}^{kj})$ seront calculés en utilisant les équations (1) ou (2).

Exemple 1 : si $N = 2$.

$$D(\underline{\underline{A}}) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

$$= A_{11} \times (-1)^2 \times A_{22} + A_{12} \times (-1)^{1+2} \times A_{21}$$

d'après (1) en choisissant la 1ère ligne

$$= A_{12} \times (-1)^{1+2} \times A_{21} + A_{22} \times (-1)^4 \times A_{11}$$

d'après (2) en choisissant la 2nde colonne

Soit $D(\underline{\underline{A}}) = A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12}$

On retrouve bien la définition du déterminant des matrices 2×2.

Exemple 2 : $N=3$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

en développant suivant la 3ème ligne

$$= 0 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

en développant suivant la 2nde colonne

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

en développant suivant la 1ère colonne

- **Transposée d'une matrice :**

Soit $\underline{\underline{A}}$ une matrice de dimension $M \times N$

M : nombre de lignes ; N : nombre de colonnes

On appelle matrice transposée de $\underline{\underline{A}}$, qu'on note $\underline{\underline{A}}^T$, la matrice de dimension $N \times M$ dont les éléments sont

$$\boxed{(\underline{\underline{A}}^T)_{ij} = (\underline{\underline{A}})_{ji} = A_{ji} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M \end{array}}$$

- **Déterminant de la transposée :**

$$\boxed{D(\underline{\underline{A}}^T) = D(\underline{\underline{A}})}$$

En effet, si $\underline{\underline{A}}$ est carrée (sinon $D(\underline{\underline{A}}^T) = D(\underline{\underline{A}}) = 0$), on a

$$D(\underline{\underline{A}}^T) = \sum_{k=1}^{N_A} (\underline{\underline{A}}^T)_{ik} (-1)^{i+k} D((\underline{\underline{A}}^T)^{ik})$$

$$= \sum_{k=1}^{N_A} A_{ki} (-1)^{k+i} D(\underbrace{(\underline{\underline{A}}^{ki})^T}_{\text{ordre } N_A - 1})$$

par récurrence

$$= \sum_{k=1}^{N_A} A_{ki} (-1)^{k+i} D(\underline{\underline{A}}^{ki}) = D(\underline{\underline{A}})$$

Si $N=2$ et $M=2$, on retrouve le résultat connu

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Remarque :

$(\underline{\underline{A}}^T)_{1j} = A_{j1}$ ← la 1ère ligne de $\underline{\underline{A}}^T$ est la 1ère colonne de $\underline{\underline{A}}$

$(\underline{\underline{A}}^T)_{2j} = A_{j2}$ ← la 2nde ligne de $\underline{\underline{A}}^T$ est la 2nde colonne de $\underline{\underline{A}}$

$\vdots$

$(\underline{\underline{A}}^T)_{Nj} = A_{jN}$ ← la Nème ligne de $\underline{\underline{A}}^T$ est la Nème colonne de $\underline{\underline{A}}$.

ou encore

$(\underline{\underline{A}}^T)_{i1} = (\underline{\underline{A}})_{1i}$ ← la 1ère colonne de $\underline{\underline{A}}^T$ est la 1ère ligne de $\underline{\underline{A}}$

$\vdots$

$(\underline{\underline{A}}^T)_{iM} = (\underline{\underline{A}})_{Mi}$ ← la Mème colonne de $\underline{\underline{A}}^T$ est la Mème ligne de $\underline{\underline{A}}$.

Exemple :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 0 & 0 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$$

- Produit de 2 matrices

Soient $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ deux matrices de dimensions $M_A \times N_A$ et $M_B \times N_B$, respectivement.

⊛ Si $N_A \neq M_B$, on dira que le produit $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ n'existe pas. Il n'est pas défini.

⊛ Si $N_A = M_B$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ sera une matrice de dimension $N_A \times N_B$ dont les éléments sont définis comme suit,

$$\boxed{\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{N_A} A_{ik} B_{kj} \quad \text{avec } 1 \leq i \leq M_A, \; 1 \leq j \leq N_B}$$

j ème colonne de $\underline{\underline{B}}$

i ème ligne de $\underline{\underline{A}}$

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{iN_A} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & B_{1j} & \cdots \\ \cdots & B_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & B_{N_A j} & \cdots \end{bmatrix}$$

- Déterminant de $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$.

Si $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont carrées et de même ordre, on peut montrer que

$$\boxed{D(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = D(\underline{\underline{A}}) \times D(\underline{\underline{B}}) = D(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})}$$

- Transposée du produit $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$

$$\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)^T_{ij} = \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)_{ji}$$

$$= \sum_{k=1}^{N_A} A_{jk} B_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{N_A} (\underline{\underline{A}}^T)_{kj} (\underline{\underline{B}}^T)_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{N_A} (\underline{\underline{B}}^T)_{ik} (\underline{\underline{A}}^T)_{kj}$$

$$= \left(\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T\right)_{ij}$$

d'où $\boxed{(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T}$

- $$\boxed{(\underline{\underline{A}}^T)^T = A}$$

Preuve :

$$((\underline{\underline{A}}^T)^T)_{ij} = (\underline{\underline{A}}^T)_{ji} = (\underline{\underline{A}})_{ij} = A_{ij}$$

- Inverse d'une matrice :

* Si $\underline{\underline{A}}$ n'est pas une matrice carrée alors on dira qu'elle n'est pas inversible.

* Si $\underline{\underline{A}}$ est une matrice carrée d'ordre N_A et que $D(\underline{\underline{A}}) \neq 0$ alors $\underline{\underline{A}}$ est dite inversible. Son inverse, notée $\underline{\underline{A}}^{-1}$, est telle que

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix},$$

matrice identité

et s'exprime comme suit

$$\boxed{\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{D(\underline{\underline{A}})} (\underline{\underline{K}}_A)^T}$$

$\underline{\underline{K}}_A$ est la comatrice associée à $\underline{\underline{A}}$ (ou matrice des cofacteurs de $\underline{\underline{A}}$) définie comme suit :

$$\boxed{(\underline{\underline{K}}_A)_{ij} = (-1)^{i+j} D(\underline{\underline{A}}^{ij})}$$

Exemple : si $N = 2$ on retrouve bien

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{D(\underline{\underline{A}})} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{D(\underline{\underline{A}})} \underline{\underline{K}}_A^T$$

puisque $\underline{\underline{K}}_A = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}$

Commentaire : on vérifie bien que

$$(\underline{\underline{K}}_A^T \underline{\underline{A}})_{ii} = \sum_{k=1}^{N_A} (\underline{\underline{K}}_A^T)_{ik} A_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{N_A} (\underline{\underline{K}}_A)_{ki} A_{ki}$$

développement de $D(\underline{\underline{A}})$ suivant la colonne i

$$= \sum_{k=1}^{N_A} (-1)^{k+i} D(\underline{\underline{A}}^{ki}) A_{ki}$$

$$= D(\underline{\underline{A}})$$

d'où $\left(\frac{1}{D(\underline{\underline{A}})} \underline{\underline{K}}_A^T \underline{\underline{A}}\right)_{ii} = 1$

Commentaire (suite)

Si $i \neq j$,

$$(\underline{\underline{K}}_A^T \underline{\underline{A}})_{ij} = \sum_{k=1}^{N_A} (\underline{\underline{K}}_A^T)_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{N_A} (\underline{\underline{K}}_A)_{ki} A_{kj} = \sum_{k=1}^{N_A} (-1)^{k+i} D(\underline{\underline{A}}^{ki}) A_{kj}$$

développement suivant la $i^{\text{ème}}$ colonne

$$= D(\underline{\underline{A}}^{i\to j})$$

où $\underline{\underline{A}}^{i\to j}$ est la matrice $\underline{\underline{A}}$ dont on a remplacé la $i^{\text{ème}}$ colonne par la colonne j

$$\underline{\underline{A}}^{i\to j} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1j} & \cdots \\ \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2j} & \cdots \\ & \vdots & & & \\ \cdots & A_{N_A j} & \cdots & A_{N_A j} & \cdots \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow \quad\quad & \uparrow \\ \text{colonne } i \quad\quad & \text{colonne } j \end{array} \end{array}$$

Propriétés complémentaires du déterminant:

* Soit $\underline{\underline{C}}$ une matrice carrée d'ordre N. On note $\underline{\underline{C}}^{i\leftrightarrow i+1}$ la matrice $\underline{\underline{C}}$ dont on a inversé les colonnes i et $i+1$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cdots & C_{1i} & C_{1\,i+1} & \cdots \\ \cdots & C_{2i} & C_{2\,i+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \\ \cdots & C_{Ni} & C_{N\,i+1} & \cdots \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{colonne } i & \text{colonne } (i+1) \end{array} \end{array}, \quad \underline{\underline{C}}^{i\leftrightarrow i+1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cdots & C_{1\,i+1} & C_{1i} & \cdots \\ \cdots & C_{2\,i+1} & C_{2i} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \\ \cdots & C_{N\,i+1} & C_{Ni} & \cdots \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{colonne } i & \text{colonne } i+1 \end{array} \end{array}$$

$$D(\underline{\underline{C}}^{i\leftrightarrow i+1}) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+i} \underbrace{(\underline{\underline{C}}^{i\leftrightarrow i+1})_{ki}}_{C_{k(i+1)}} \underbrace{D\left((\underline{\underline{C}}^{i\leftrightarrow i+1})^{ki}\right)}_{D(\underline{\underline{C}}^{k(i+1)})}$$

développement suivant la $i^{\text{ème}}$ colonne

$$= (-1) \underbrace{\sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+(i+1)} C_{k(i+1)} D(\underline{\underline{C}}^{k(i+1)})}_{\text{développement de } D(\underline{\underline{C}}) \text{ suivant la colonne } (i+1)}$$

d'où

$$\boxed{D(\underline{\underline{C}}^{i\leftrightarrow i+1}) = -D(\underline{\underline{C}})}$$

$$* \quad \underline{\underline{C}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1j} & \cdots \\ \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2j} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & c_{Ni} & \cdots & c_{Nj} & \cdots \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow \text{ Colonne } i & \quad & \uparrow \text{ Colonne } j \end{array} \end{array} \qquad \underline{\underline{C}}^{\,i\leftrightarrow j} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1i} & \cdots \\ \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2i} & \cdots \\ & \vdots & & & \\ \cdots & c_{Nj} & \cdots & c_{Ni} & \cdots \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow \text{ Colonne } i & \quad & \uparrow \text{ Colonne } j \end{array} \end{array}$$

$$D(\underline{\underline{C}}^{\,i\leftrightarrow j}) = \underbrace{(-1)^{j-i}}_{\substack{\text{pour déplacer}\\ \text{la colonne } i \text{ de } \underline{\underline{C}}\\ \text{juste après la colonne } j}} \times \underbrace{(-1)^{j-(i+1)}}_{\substack{\text{pour déplacer la colonne } j\\ \text{de } \underline{\underline{C}} \text{ et la mettre à}\\ \text{la place initiale de la colonne } i\\ \text{dans } \underline{\underline{C}}.}} D(\underline{\underline{C}}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{D(\underline{\underline{C}}^{\,i\leftrightarrow j}) = -D(\underline{\underline{C}})} \quad (3)$$

* <u>Conséquence importante de l'équation (3)</u> : Si $\underline{\underline{C}}$ a deux colonnes identiques (ou deux lignes identiques) alors $D(\underline{\underline{C}}) = 0$.

<u>Preuve</u> : si les colonnes i et j de $\underline{\underline{C}}$ sont identiques, alors

$$\underline{\underline{C}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1i} & \cdots \\ \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2i} & \cdots \\ \cdots & c_{Ni} & \cdots & c_{Ni} & \cdots \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow \text{ Colonne } i & \quad & \uparrow \text{ Colonne } j \end{array} \end{array}$$

et $D(\underline{\underline{C}}) = -D(\underline{\underline{C}}^{\,i\leftrightarrow j}) = -D(\underline{\underline{C}})$

puisque $\underline{\underline{C}}^{\,i\leftrightarrow j} = \underline{\underline{C}} \quad \Rightarrow \quad 2D(\underline{\underline{C}}) = 0 \Rightarrow D(\underline{\underline{C}}) = 0$

* <u>Conclusion</u> : $D(\underline{\underline{A}}^{\,i\rightarrow j}) = 0$ si $i \neq j$ de sorte que, en considérant également le cas $i = j$, on obtient

$$(\underline{\underline{K}}_A^T \underline{\underline{A}})_{ij} = D(\underline{\underline{A}})\,\delta_{ij} \begin{cases} \to D(\underline{\underline{A}}) & \text{si } i = j \\ \to 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

d'où

$$\boxed{\underline{\underline{K}}_A^T \, \underline{\underline{A}} = D(\underline{\underline{A}})\, \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{K}}_A^T}$$

- Si $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$, on dit que $\underline{\underline{A}}$ est <u>symétrique</u>.
- Si $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}^{-1}$, on dit que $\underline{\underline{A}}$ est <u>orthonormée</u> $\longrightarrow$ $D(\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}) = D(\underline{\underline{A}}^T)\,D(\underline{\underline{A}}) = \left(D(\underline{\underline{A}})\right)^2 = D(\underline{\underline{E}}) = 1$

donc $\boxed{|D(\underline{\underline{A}})| = 1}$

- <u>Trace d'une matrice carrée</u>

Soit $\underline{\underline{A}}$ une matrice carrée d'ordre N_A.
On appelle "trace de $\underline{\underline{A}}$", et on la note $Tr\,\underline{\underline{A}}$,
le nombre suivant :

$$Tr\,\underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{N_A} A_{kk} \longleftarrow$$ Somme des éléments diagonaux !

$* \boxed{Tr\,\underline{\underline{A}}^T = Tr\,\underline{\underline{A}}}$ En effet

$$Tr\,\underline{\underline{A}}^T = \sum_{k=1}^{N_A} (\underline{\underline{A}}^T)_{kk} = \sum_{k=1}^{N_A} A_{kk} = Tr\,\underline{\underline{A}}.$$

$* \boxed{Tr(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = Tr(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})}$ si $\underline{\underline{B}}$ est carrée d'ordre N_A.

En effet,

$$Tr(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \sum_{k=1}^{N_A} (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})_{kk} = \sum_{k=1}^{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} A_{ki} B_{ik}$$

Soit $$Tr(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{k=1}^{N_A} B_{ik} A_{ki} = \sum_{i=1}^{N_A} (\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})_{ii} = Tr(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})$$