Résolution d'un système d'équations linéaires

- Soient $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ N nombres réels inconnus, solutions du système de N équations linéaires suivant

$$(S) \begin{cases} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + A_{13} x_3 + \dots + A_{1N} x_N = y_1 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + A_{23} x_3 + \dots + A_{2N} x_N = y_2 \\ \vdots \\ A_{N1} x_1 + A_{N2} x_2 + A_{N3} x_3 + \dots + A_{NN} x_N = y_N \end{cases}$$

où $\begin{cases} \{A_{ij}\}_{\substack{1\leq i\leq N \\ 1\leq j\leq N}} \\ \{y_i\}_{1\leq i\leq N} \end{cases}$ $\longrightarrow$ sont des nombres réels connus

- (S) s'écrit de manière compacte comme suit,

$$\left(\sum_{k=1}^{N} A_{ik} x_k\right) = y_i \qquad 1 \leq i \leq N$$

- Nous souhaitons utiliser le formalisme matriciel pour résoudre (S)

- On pose $\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$

$\underline{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$

$(\underline{\underline{A}})_{ij} = A_{ij}$ de sorte que

$$\boxed{(S) \iff \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{Y}}$$

__Exemple 1__ Résoudre

$$\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ 3x + 4y = 1 & (2) \end{cases}$$

$\underline{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\underline{Y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

et $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Dans ce cas, les solutions sont obtenues simplement :

$3\times(1) \rightarrow \quad 3x + 3y = 6 \quad (3)$

$(2) \quad 3x + 4y = 1$

et $\left.\begin{aligned} (2)-(3) &\longrightarrow y = -5 \\ (2) &\longrightarrow x = \frac{1-4y}{3} = 7 \end{aligned}\right\} \rightarrow$ solution unique !

__Exemple 2__ : $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3(x+y) = 6 \\ 3(x+y) = 1 \end{cases}$

pas de solutions !

dans cet exemple, $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow D(\underline{\underline{A}}) = 0$

Exemple 3 : $\begin{cases} x + y = \frac{1}{3} \\ 3x + 3y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = \frac{1}{3} \\ x + y = 1/3 \end{cases} \iff x = \frac{1}{3} - y$ pas de solution unique !

Dans cet exemple, on a toujours $D(\underline{\underline{A}}) = 0$.

Notons que si $\underline{X}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ est solution ($\underline{X_0} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$ par exemple), alors $\underline{X} = \begin{bmatrix} x_0 + \alpha \\ y_0 - \alpha \end{bmatrix}$ est également solution puisque $(x_0 + \alpha) + (y_0 - \alpha) = x_0 + y_0 = \frac{1}{3}$

- Retour au cas général :

  $\ast$ si $D(\underline{\underline{A}}) \neq 0$, alors il existe une solution unique. En effet, dans ce cas, $(S) \iff \underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}}}_{\underline{\underline{E}}} \underline{X} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{Y}$

  d'où $(S) \iff \boxed{\underline{X} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{Y}}$

  Dans l'exemple 1, $D(\underline{\underline{A}}) = 1$, $\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}$ ok !

  $\ast$ Si $D(\underline{\underline{A}}) = 0$ et si $\underline{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_N \end{bmatrix}$ est une solution, alors cette solution n'est pas unique. Il en existe en fait une infinité !

Preuve : soit $\underline{X} = \underline{\tilde{X}} + \gamma \, \underline{\underline{\mathcal{K}}}_A^T \underline{\tilde{X}}$, alors $\forall \gamma$, $\underline{\underline{A}} \underline{X} = \underbrace{\underline{\underline{A}} \underline{\tilde{X}}}_{\underline{Y}} + \gamma \underbrace{\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\mathcal{K}}}_A^T}_{\underbrace{D(\underline{\underline{A}})}_{= 0} \underline{\underline{E}}} \underline{\tilde{X}}$

donc $\underline{X}$ est solution.

Dans l'exemple 3 : $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $D(\underline{\underline{A}}) = 0$, $\underline{\underline{K}}_A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{K}}_A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, $\gamma \underline{\underline{K}}_A^T \underline{\tilde{X}} = \gamma \begin{bmatrix} 3x_0 - y_0 \\ -3x_0 + y_0 \end{bmatrix}$. Ainsi, en posant $\alpha = \gamma(3x_0 - y_0)$, il vient

$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_0 + \alpha \\ y_0 - \alpha \end{bmatrix}$ ok !