Représentation matricielle d'opérateurs linéaires

I _ Opérateurs linéaires dans $\mathbb{R}^2$

- Soit $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$ une base cartésienne de $\mathbb{R}^2$
- Par définition, un opérateur $\hat{A}$ ← notation ! transforme un vecteur quelconque $\vec{u} = u_x \vec{e_x} + u_y \vec{e_y}$ de $\mathbb{R}^2$ en un nouveau vecteur de $\mathbb{R}^2$ noté $\hat{A}(\vec{u})$

$$\vec{u} \xmapsto{\quad \hat{A} \quad} \hat{A}(\vec{u})$$

- $\hat{A}$ est un opérateur linéaire s'il vérifie les relations suivantes :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \qquad \hat{A}(\vec{u}+\vec{v}) = \hat{A}(\vec{u}) + \hat{A}(\vec{v}) \qquad (1)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \hat{A}(\alpha\vec{u}) = \alpha \hat{A}(\vec{u}) \qquad (2)$$

- Conséquences de la linéarité de $\hat{A}$: il suffit de savoir comment $\hat{A}$ agit sur les vecteurs de base $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ pour savoir comment il agit sur n'importe quel vecteur.

En effet
$$\hat{A}(\vec{u}) = \hat{A}(u_x\vec{e_x} + u_y\vec{e_y}) \underset{(1)}{=} \hat{A}(u_x\vec{e_x}) + \hat{A}(u_y\vec{e_y})$$
$$\underset{(2)}{=} u_x \hat{A}(\vec{e_x}) + u_y \hat{A}(\vec{e_y})$$

Si
$$\hat{A}(\vec{e_x}) = A_{11}\vec{e_x} + A_{21}\vec{e_y}$$
$$\hat{A}(\vec{e_y}) = A_{12}\vec{e_x} + A_{22}\vec{e_y}$$

alors
$$\hat{A}(\vec{u}) = u_x(A_{11}\vec{e_x} + A_{21}\vec{e_y}) + u_y(A_{12}\vec{e_x} + A_{22}\vec{e_y})$$
$$= (u_x A_{11} + u_y A_{12})\vec{e_x} + (u_x A_{21} + u_y A_{22})\vec{e_y}$$

- Représentations matricielles :

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \qquad [\hat{A}] = \begin{array}{cc} \hat{A}(\vec{e_x}) & \hat{A}(\vec{e_y}) \\ \left[\begin{array}{c} A_{11} \\ A_{21} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} A_{12} \\ A_{22} \end{array}\right] \end{array} = \underline{\underline{A}}$$

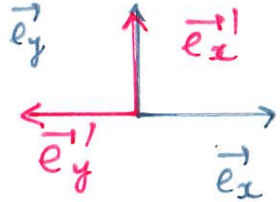
représentation matricielle de $\hat{A}$ dans la base $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$

$$[\hat{A}(\vec{u})] = \begin{bmatrix} A_{11}u_x + A_{12}u_y \\ A_{21}u_x + A_{22}u_y \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}\,\underline{u}$$

représentation matricielle de $\hat{A}(\vec{u})$

- La représentation matricielle de $\hat{A}$ dépend de la base ! Soit la nouvelle base

$$\vec{e_x}' = \vec{e_y} \quad \text{et} \quad \vec{e_y}' = -\vec{e_x}$$



$$\hat{A}(\vec{e_x}') = \hat{A}(\vec{e_y}) = A_{12}\,\vec{e_x} + A_{22}\,\vec{e_y}$$
$$= A_{22}\,\vec{e_x}' - A_{12}\,\vec{e_y}'$$

$$\hat{A}(\vec{e_y}') = \hat{A}(-\vec{e_x}) = -\hat{A}(\vec{e_x}) = -A_{11}\,\vec{e_x} - A_{21}\,\vec{e_y}$$
$$= -A_{21}\,\vec{e_x}' + A_{11}\,\vec{e_y}'$$

d'où $[\hat{A}]_{\{\vec{e_x}',\vec{e_y}'\}} = \underline{\underline{A}}' = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11} \end{bmatrix} \neq \underline{\underline{A}}$!

et pourtant $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{A}}'$ représentent le même opérateur $\hat{A}$ (mais dans des bases différentes)

- Opérateur représenté par une matrice orthonormée

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$,

$\vec{u} = u_x\,\vec{e_x} + u_y\,\vec{e_y}$ et $\vec{v} = v_x\,\vec{e_x} + v_y\,\vec{e_y}$.

On s'intéresse au produit scalaire

$$\hat{A}(\vec{u}) \cdot \hat{A}(\vec{v}) = [\hat{A}(\vec{u})]^T [\hat{A}(\vec{v})] = (\underline{\underline{A}}\,\underline{u})^T \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$$
$$= \underline{u}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$$

où $\underline{\underline{A}}$ est la représentation de $\hat{A}$ dans la base $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$.

Si $\underline{\underline{A}}$ est orthonormée alors

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^T, \text{ conduisant ainsi à}$$

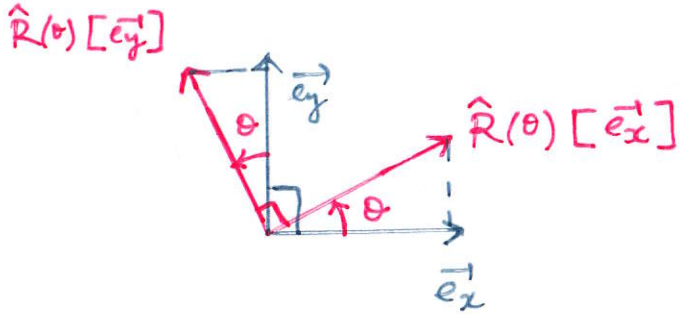
$$\hat{A}(\vec{u}) \cdot \hat{A}(\vec{v}) = \underline{u}^T \underline{\underline{E}}\,\underline{v} = \underline{u}^T \underline{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Conclusion: Un opérateur représenté dans une base orthonormée $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$ par une matrice orthonormée conserve le produit scalaire. Par conséquent, il conserve les normes (et donc les distances) ainsi que les angles. On dira, par extension, que $\hat{A}$ est un opérateur orthonormé.

Remarque: Dans le langage courant, on utilise aussi le mot "unitaire" au lieu de "orthonormé". Cette terminologie est plutôt utilisée en algèbre complexe.

- Exemples: Toutes les opérations de symétrie dans $\mathbb{R}^2$ sont unitaires.

Ex1 Rotation d'angle θ : $\hat{R}(\theta)$



$$\begin{cases} \hat{R}(\theta)[\vec{e_x}] = \cos\theta\ \vec{e_x} + \sin\theta\ \vec{e_y} \\ \hat{R}(\theta)[\vec{e_y}] = -\sin\theta\ \vec{e_x} + \cos\theta\ \vec{e_y} \end{cases}$$

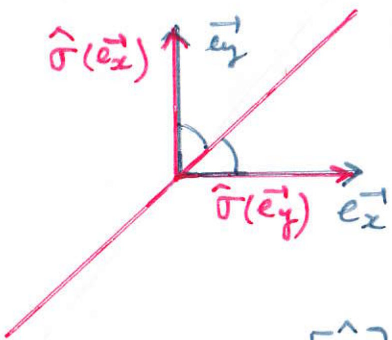
d'où $[\hat{R}(\theta)] = \underline{\underline{R}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{R}}^T(\theta)\ \underline{\underline{R}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}(\theta)\ \underline{\underline{R}}^T(\theta)$$

On remarque que $D(\underline{\underline{R}}(\theta)) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Généralisation : On dira qu'une matrice $\underline{\underline{A}}$ orthonormée représente une rotation si $D(\underline{\underline{A}}) = +1$.

EX2



Réflexion par rapport à la bissectrice des axes x et y : $\hat{\sigma}$

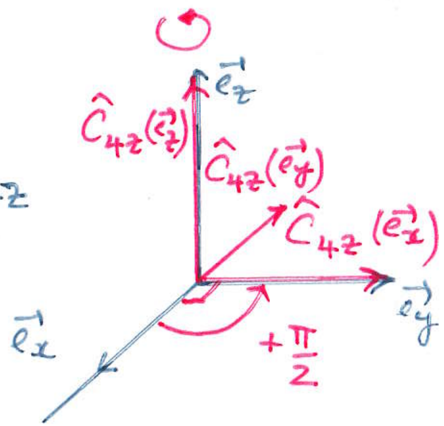
$$\begin{cases} \hat{\sigma}(\vec{e_x}) = \vec{e_y} \\ \hat{\sigma}(\vec{e_y}) = \vec{e_x} \end{cases}$$

d'où $[\hat{\sigma}] = \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{\underline{\sigma}}^T = \underline{\underline{\sigma}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

On remarque $D(\underline{\underline{\sigma}}) = -1 \longleftarrow$ ne correspond pas à une rotation !

EX3 Généralisation à $\mathbb{R}^3$: rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe des z $\longleftarrow \hat{C}_{4z}$

$$[\hat{C}_{4z}] = \underline{\underline{C}}_{4z} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- **Composition de deux opérateurs**

$$\vec{u} \xrightarrow{\hat{B}} \hat{B}(\vec{u}) \xrightarrow{\hat{A}} \hat{A}\hat{B}(\vec{u}) = \hat{A}\left(\hat{B}(\vec{u})\right)$$

La représentation matricielle de $\hat{A}\hat{B}(\vec{u})$ dans la base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ est

$$\underbrace{\left[\hat{A}\hat{B}(\vec{u})\right]}_{\text{vecteur colonne}} = \underline{\underline{A}}\,\underbrace{\left[\hat{B}(\vec{u})\right]}_{\text{vecteur colonne}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underbrace{\underline{u}}_{\text{vecteur colonne}}$$

Conclusion: le produit $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ est la représentation de $\hat{A}\hat{B}$.

- **Inverse d'un opérateur**: $\hat{B}$ est l'inverse de $\hat{A}$

si $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{E}$ ← opérateur identité

où $\forall \vec{u}$ $\hat{E}(\vec{u}) = \vec{u}$. On note alors

$\hat{B} = \hat{A}^{-1}$ et $\left[\hat{A}^{-1}\hat{A}\right] = \left[\hat{A}\hat{A}^{-1}\right] = \left[\hat{E}\right] = \underline{\underline{E}}$

$$\left[\hat{A}^{-1}\right]\left[\hat{A}\right] = \left[\hat{A}\right]\left[\hat{A}^{-1}\right]$$

soit $\underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$

représentation de $\hat{A}^{-1}$ — représentation de $\hat{A}$.

Exemples: (1) revenons à l'exemple 1 p 2/0L,

$$\left[\hat{R}(\theta)\right] = \underline{\underline{R}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}}^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{R}}(-\theta) = \left[\hat{R}(-\theta)\right] = \left[\hat{R}^{-1}(\theta)\right]$$

Conclusion: l'inverse de $\hat{R}(\theta)$ est la rotation d'angle $-\theta$, notée $\hat{R}(-\theta)$.

(2) Composition de deux rotations:

$$\underline{\underline{R}}(\theta_1 + \theta_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

Formules utiles:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{avec } i^2 = -1$$

car $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. De même

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Ainsi

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \frac{e^{i(\theta_1+\theta_2)} + e^{-i(\theta_1+\theta_2)}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}\right)\left(e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_2}\right) + \left(e^{i\theta_1} - e^{-i\theta_1}\right) \times \left(e^{i\theta_2} - e^{-i\theta_2}\right)\right]$$

d'où $\boxed{\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)}$

De même

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \frac{e^{i(\theta_1+\theta_2)} - e^{-i(\theta_1+\theta_2)}}{2i}$$

$$= \frac{1}{4i}\left[\left(e^{i\theta_1} - e^{-i\theta_1}\right)\left(e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_2}\right) + \left(e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}\right)\left(e^{i\theta_2} - e^{-i\theta_2}\right)\right]$$

$$\boxed{\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2}$$

D'où $\underline{\underline{R}}(\theta_1+\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \end{bmatrix}$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{R}}(\theta_1)} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{R}}(\theta_2)} = \underline{\underline{R}}(\theta_2)\,\underline{\underline{R}}(\theta_1)$$

<u>Conclusion:</u> $\hat{R}(\theta_1+\theta_2) = \hat{R}(\theta_1)\,\hat{R}(\theta_2) = \hat{R}(\theta_2)\,\hat{R}(\theta_1)$

rotation d'angle θ_2 puis rotation d'angle θ_1

rotation d'angle θ_1 puis rotation d'angle θ_2

On remarque que si $\theta_1+\theta_2 = 0$ alors $\hat{R}(0) = \hat{E} = \hat{R}(\theta_1)\,\hat{R}(-\theta_1)$

$$= \underbrace{\hat{R}(-\theta_1)}_{\hat{R}^{-1}(\theta_1)}\,\hat{R}(\theta_1)$$

II – Généralisation à un espace de dimension N

- Soit $\mathcal{E}_N$ un espace de dimension N dont $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_N}\}$ est une base. On note $\hat{A}$ un opérateur linéaire de $\mathcal{E}_N$ dans $\mathcal{E}_N$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_N & \xrightarrow{\hat{A}} & \mathcal{E}_N \\ \vec{u} & \longmapsto & \hat{A}(\vec{u}) \end{array}$$

- Tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{E}_N$ peut se décomposer comme suit

$$\vec{u} = u_1 \vec{e_1} + u_2 \vec{e_2} + \cdots + u_N \vec{e_N} = \sum_{k=1}^{N} u_k \vec{e_k}$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

← représentation de $\vec{u}$ dans la base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_N}\}$.

- $$\hat{A}(\vec{u}) = \hat{A}\left(\sum_{k=1}^{N} u_k \vec{e_k}\right) = \sum_{k=1}^{N} u_k \hat{A}(\vec{e_k})$$

linéarité de $\hat{A}$

Il suffit de connaître l'image $\hat{A}(\vec{e_k})$ de chaque vecteur de base par $\hat{A}$ pour connaître l'image de n'importe quel vecteur par $\hat{A}$.

- Le vecteur $\hat{A}(\vec{e_k})$ peut se décomposer comme suit dans la base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_N}\}$

$$\hat{A}(\vec{e_k}) = \sum_{i=1}^{N} A_{ik} \vec{e_i}$$

← définition !

$$\begin{array}{c} \\ \end{array}\hat{A}(\vec{e_k})$$

$$[\hat{A}] = \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & \cdots & A_{2k} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{Nk} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}$$

Ainsi $$\hat{A}(\vec{u}) = \sum_{k=1}^{N} u_k \sum_{i=1}^{N} A_{ik} \vec{e_i}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{N} u_k A_{ik}\right)}_{[\hat{A}(\vec{u})]_i} \vec{e_i}$$

$$\boxed{[\hat{A}(\vec{u})] = \begin{bmatrix} [\hat{A}(\vec{u})]_1 \\ [\hat{A}(\vec{u})]_2 \\ \vdots \\ [\hat{A}(\vec{u})]_N \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}\,\underline{u}}$$

- Produit scalaire : on suppose dans la suite que la base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_N}\}$ est orthonormée, soit

$$\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{ij} \begin{cases} \to 1 \text{ si } i = j \\ \to 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{E}_N$,

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^{N} u_k \vec{e_k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \sum_{j=1}^{N} v_j \vec{e_j}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} u_k v_j \underbrace{\vec{e}_k\cdot\vec{e}_j}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^{N} u_k v_k$$

soit $\vec{u}\cdot\vec{v} = \underline{u}^T \underline{v} = \underline{v}^T \underline{u}$

$$= [u_1 u_2 \dots u_N]\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = [v_1 v_2 \dots v_N]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

- $\hat{A}(\vec{u})\cdot\hat{A}(\vec{v}) = (\underline{\underline{A}}\,\underline{u})^T \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{u}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$

Si $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}^{-1}$ on dira que $\hat{A}$ est orthonormé

et $\hat{A}(\vec{u})\cdot\hat{A}(\vec{v}) = \underline{u}^T \underline{v}$ ← conservation du produit scalaire !

- Expression simple pour les éléments de matrice A_{ij} :

$$\hat{A}(\vec{e}_k) = \sum_{i=1}^{N} A_{ik}\,\vec{e}_i \Rightarrow \vec{e}_j\cdot\hat{A}(\vec{e}_k) = \sum_{i=1}^{N} A_{ik}\underbrace{\vec{e}_j\cdot\vec{e}_i}_{\delta_{ij}}$$

d'où $$\boxed{A_{jk} = \vec{e}_j\cdot\hat{A}(\vec{e}_k)} \quad (3)$$

Remarque : écriture matricielle de l'équation (3) → $A_{jk} = \underline{e}_j^T \underline{\underline{A}}\,\underline{e}_k$

$$\underline{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne } j \qquad e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne } k$$

$$A_{jk} = \begin{array}{c} [0 \dots 0\,1\,0 \dots] \\ \uparrow \\ \text{colonne } j \end{array} \begin{bmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \\ \vdots \\ A_{jk} \\ \vdots \\ A_{Nk} \end{bmatrix}$$