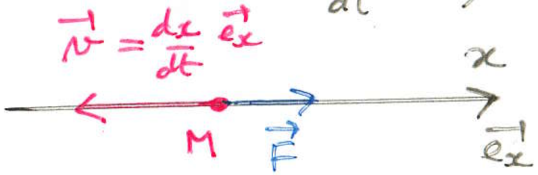
Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée

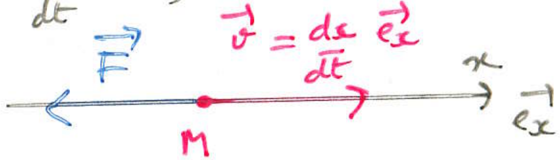
I – Introduction

- Considérons le problème d'une particule se déplaçant suivant l'axe des x, dont la masse est m et qui est soumise à une force d'amortissement $\vec{F} = -\gamma \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{vitesse}} \vec{e_x} = F\vec{e_x}$ avec $\gamma > 0$

- Notons que $F > 0$ lorsque la particule se déplace dans la direction $-\vec{e_x}$ $\left(\frac{dx}{dt} < 0\right)$



- $F < 0$ lorsque la particule se déplace dans la direction $+\vec{e_x}$ $\left(\frac{dx}{dt} > 0\right)$



- D'après la loi de Newton

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = -\gamma\frac{dx}{dt}\vec{e_x} = m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{e_x}$$

d'où $$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}} \quad (1) \qquad \text{avec } \tau^{-1} = \frac{\gamma}{m} > 0$$

- Réécriture sous forme matricielle :

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix}$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{d\underline{X}(t)}{dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underline{X}(t) \qquad (2)$$

- Diagonaliser $\underline{\underline{A}}$ signifie trouver une matrice $\underline{\underline{Z}}$ telle que $\underline{\underline{Z}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Z}}$ est diagonale soit

$$\underline{\underline{Z}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}}$$

valeurs propres de $\underline{\underline{A}}$

- Intérêt : si une telle matrice $\underline{\underline{Z}}$ existe alors l'équation (2) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d\underline{X}(t)}{dt} = \underline{\underline{Z}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{Z}}^{-1}\underline{X}(t).$$

En posant $\underline{\tilde{X}}(t) = \underline{\underline{Z}}^{-1}\underline{X}(t)$ il vient

$$\boxed{\frac{d\underline{\tilde{X}}(t)}{dt} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\tilde{X}}(t)} \qquad (3)$$

Il est alors très simple de résoudre (3). En effet, en écrivant $\underline{\tilde{X}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix}$, il vient

$$(3) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{d\tilde{x}_1(t)}{dt} \\ \dfrac{d\tilde{x}_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \tilde{x}_1(t) \\ \lambda_2 \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

Conclusion : On obtient deux équations découplées du premier ordre par rapport au temps.

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}_1(t)}{dt} = \lambda_1 \tilde{x}_1(t) \\ \dfrac{d\tilde{x}_2(t)}{dt} = \lambda_2 \tilde{x}_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \tilde{x}_1(0) e^{\lambda_1 t} \\ \tilde{x}_2(t) = \tilde{x}_2(0) e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

déterminisme !

Ainsi $\underline{X}(t) = \underline{\underline{Z}}\, \underline{\tilde{X}}(t) = \underline{\underline{Z}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(0) e^{\lambda_1 t} \\ \tilde{x}_2(0) e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$ avec $\underline{X}(0) = \underline{\underline{Z}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(0) \\ \tilde{x}_2(0) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(0) \\ \tilde{x}_2(0) \end{bmatrix} = \underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{X}(0)$

solution cherchée

Connu (Conditions initiales)

• Questions : Comment trouver λ_1 et λ_2 ?

Il est important de remarquer que pour les valeurs propres λ_1 et λ_2 de $\underline{\underline{A}}$

$$D(\underline{\underline{D}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}}) = 0 \quad \text{et} \quad D(\underline{\underline{D}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}}) = 0$$

Ainsi si λ est valeur propre de $\underline{\underline{A}}$ alors $D(\underline{\underline{D}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$

$$= D(\underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{Z}} - \lambda \underline{\underline{E}})$$

$$= D(\underline{\underline{Z}}^{-1} (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{Z}})$$

$$= D((\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{Z}}\, \underline{\underline{Z}}^{-1})$$

$$= \boxed{D(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0}$$

Dans notre exemple,

$$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} - \lambda \end{bmatrix}$$

d'où $D(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \lambda \left(\frac{1}{\tau} + \lambda \right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = -\frac{1}{\tau}$

Ainsi $\boxed{\lambda_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -1/\tau}$

Comment trouver $\underline{\underline{Z}}$?

$$\underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix}$$

en posant $\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \end{bmatrix}$ il vient $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta/\tau \\ 0 & -\varepsilon/\tau \end{bmatrix}$

soit $\begin{bmatrix} \beta & \varepsilon \\ -\beta/\tau & -\varepsilon/\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta/\tau \\ 0 & -\varepsilon/\tau \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \beta = 0 \\ \varepsilon = -\delta/\tau \end{matrix}$

d'où $\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ 0 & -\delta/\tau \end{bmatrix}$. ← pas unique solution

Une solution possible est obtenue pour $\alpha = 1$
et $\delta = 1$ soit

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix}$$

On vérifie bien que $\underline{\underline{Z}}^{-1} = -\tau \begin{bmatrix} -1/\tau & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

et $\underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/\tau \\ 0 & 1/\tau^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}}$$

- $\underline{\tilde{X}}(0) = \underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) + \tau \dot{x}(0) \\ -\tau \dot{x}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(0) \\ \tilde{x}_2(0) \end{bmatrix}$

notation !

$\dot{x}(0)$

- $\underline{\tilde{X}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(0) \\ \tilde{x}_2(0) e^{-t/\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) + \tau \dot{x}(0) \\ -\tau \dot{x}(0) e^{-t/\tau} \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{X}(t) = \underline{\underline{Z}} \underline{\tilde{X}}(t) = \begin{bmatrix} x(0) + \tau \dot{x}(0)(1 - e^{-t/\tau}) \\ \dot{x}(0) e^{-t/\tau} \end{bmatrix}$

Conclusion : $x(t) = \underbrace{x(0) + \tau \dot{x}(0)(1 - e^{-t/\tau})} \xrightarrow[t \to +\infty]{} x(0) + \tau \dot{x}(0)$

bien en accord avec la résolution non matricielle (*)

voir le complément page 6/D

II- Diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre N

• Soit $\underline{\underline{A}}$ une matrice carrée d'ordre N. Diagonaliser $\underline{\underline{A}}$ revient à chercher une matrice $\underline{\underline{Z}}$ inversible telle que

$$\underline{\underline{Z}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{bmatrix} \text{ est diagonale.}$$

• $\underline{\underline{Z}}$ n'est pas unique. En effet, si $\underline{\underline{Z}}' = \alpha \underline{\underline{Z}}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, il vient

$$(\underline{\underline{Z}}')^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Z}}' = \underbrace{(\alpha \underline{\underline{Z}})^{-1}}_{\frac{1}{\alpha}\underline{\underline{Z}}^{-1}}\,\underline{\underline{A}}\,\alpha \underline{\underline{Z}}$$

$$= \underline{\underline{Z}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{D}}$$

• Les éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ s'appellent valeurs propres. Elles ne dépendent que de $\underline{\underline{A}}$, pas de $\underline{\underline{Z}}$.

En effet $\forall i = 1, 2, \dots, N$,

$$\mathcal{D}(\underline{\underline{D}} - \lambda_i \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda_i & & & & & & \\ & \lambda_2 - \lambda_i & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_{i-1} - \lambda_i & & & \\ & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_N - \lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

Colonne i

or $\mathcal{D}(\underline{\underline{D}} - \lambda_i \underline{\underline{E}}) = \mathcal{D}(\underline{\underline{Z}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Z}} - \lambda_i \underline{\underline{Z}}^{-1}\underline{\underline{Z}})$

$$= \mathcal{D}\left(\underline{\underline{Z}}^{-1}(\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{E}})\,\underline{\underline{Z}}\right) = \mathcal{D}\left((\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{E}})\,\underline{\underline{Z}}\,\underline{\underline{Z}}^{-1}\right)$$

$$= \boxed{\mathcal{D}(\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{E}}) = 0}$$

Les valeurs propres λ_i ne dépendent bien que de $\underline{\underline{A}}$. C'est l'équation à utiliser pour les déterminer.

• Une fois les valeurs propres connues, on cherche une matrice $\underline{\underline{Z}}$ telle que

$$\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{bmatrix}} \quad (4)$$

• Soit $\underline{Z_i}$ la colonne i de $\underline{\underline{Z}}$.

D'après l'équation (4),

$$\underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{Z_i}}_{\text{Colonne } i \text{ de } \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Z}}} = \begin{bmatrix} \lambda_i z_{1i} \\ \lambda_i z_{2i} \\ \vdots \\ \lambda_i z_{Ni} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{Z_i} = \lambda_i \underline{Z_i}}$$

. **Définition :** On dit que $\underline{Z_i}$ est vecteur colonne propre de $\underline{\underline{A}}$ associé à la valeur propre λ_i.

- **Remarques** :

(1) $D(\underline{\underline{A}}) = D(\underline{\underline{Z}}\ \underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{Z}}^{-1}) = D(\underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{Z}}^{-1}\underline{\underline{Z}}) = D(\underline{\underline{D}})$

d'où $D(\underline{\underline{A}}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N = \boxed{\prod_{i=1}^{N} \lambda_i = D(\underline{\underline{A}})}$

(2) $Tr(\underline{\underline{A}}) = Tr(\underline{\underline{Z}}\ \underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{Z}}^{-1}) = Tr(\underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{Z}}^{-1}\underline{\underline{Z}})$

$= Tr(\underline{\underline{D}})$

$\rightarrow \boxed{Tr(\underline{\underline{A}}) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i}$

III – Vecteurs propres et valeurs propres d'un opérateur.

- Soit $\mathcal{E}_N$ un espace de dimension N, dont une base est $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N\}$, et $\hat{A}$ un opérateur linéaire dans $\mathcal{E}_N$.

- On note $\underline{\underline{A}}$ la représentation matricielle de $\hat{A}$ dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N\}$.

- Si $\underline{\underline{A}}$ est diagonalisable, alors il existe une matrice $\underline{\underline{Z}}$ telle que

$$\underline{\underline{Z}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_N \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{Z_i} = \lambda_i \underline{Z_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N} \ (5)$$

$\underline{Z_i}$: colonne i de $\underline{\underline{Z}}$

- Soit $\vec{u}_i = \sum_{k=1}^{N} Z_{ki}\, \vec{e}_k$ le vecteur représenté par $\underline{Z_i}$.

$\underline{\underline{A}}\,\underline{Z_i} = \underline{\underline{A}}\,\underline{u_i} \longrightarrow$ représentation de $\hat{A}(\vec{u}_i)$

D'où, d'après l'équation (5),

$$\boxed{\hat{A}(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i} \qquad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

On dit que $\vec{u}_i$ est vecteur propre de $\hat{A}$ associé à la valeur propre λ_i.

- Représentation de $\hat{A}$ dans la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N\}$:

$$[\hat{A}]_{\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N\}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_N \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{D}}$$

Conclusion : Diagonaliser $\underline{\underline{A}}$ revient à trouver une base de vecteurs propres de $\hat{A}$. La représentation matricielle de $\hat{A}$ dans cette base est une matrice diagonale.

Complément

$$\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)} = -\frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \dot{x}(0)\, e^{-t/\tau} \Rightarrow x(t) = -\tau\dot{x}(0)\, e^{-t/\tau} + C$$

constante

avec $x(0) = -\tau\dot{x}(0) + C$

d'où $x(t) = -\tau\dot{x}(0)\, e^{-t/\tau} + x(0) + \tau\dot{x}(0)$

$$\boxed{x(t) = \tau\dot{x}(0)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + x(0)}$$

IV - Diagonalisation d'une matrice symétrique

- Soit $\underline{\underline{A}}$ une matrice symétrique d'ordre N :

$$\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$$

- On peut montrer qu'il est possible de trouver une matrice $\underline{\underline{Z}}$ orthonormée qui la diagonalise

soit $$\underline{\underline{Z}}^{-1} \underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Preuve (dans le cas simple où toutes les valeurs propres sont distinctes)

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{A}} \, \underline{z_i} = \lambda_i \underline{z_i} \\ \underline{\underline{A}} \, \underline{z_j} = \lambda_j \underline{z_j} \end{array}\right\} \rightarrow \underbrace{\underline{z_i}^T \underline{\underline{A}} \, \underline{z_j}}_{\substack{\text{nombre} \\ (\text{matrice } 1^e \text{ ligne} \\ 1^e \text{ colonne})}} = (\underline{\underline{A}}^T \underline{z_i})^T \underline{z_j}$$

soit $$\underbrace{\underline{z_i}^T \underline{\underline{A}} \, \underline{z_j}}_{\lambda_j \underline{z_j}} = (\underline{\underline{A}} \, \underline{z_i})^T \underline{z_j} = \lambda_i \underline{z_i}^T \underline{z_j}$$

car $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$

d'où $$(\lambda_j - \lambda_i) \underline{z_i}^T \underline{z_j} = 0 \Rightarrow \underline{z_i}^T \underline{z_j} = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad \text{puisque } \lambda_i \neq \lambda_j$$

- $$(\underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{Z}})_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (\underline{\underline{Z}}^T)_{ik} (\underline{\underline{Z}})_{kj} = \sum_{k=1}^{N} Z_{ki} Z_{kj}$$

soit $$(\underline{\underline{Z}}^T \underline{\underline{Z}})_{ij} = \underline{Z_i}^T \underline{Z_j} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

- Si $\underline{z_i}^T \underline{z_i} \neq 1$, il est toujours possible de construire la matrice $\underline{\underline{Z}}'$ telle que

$$\underline{Z}'_i = \frac{\underline{z_i}}{\sqrt{\underline{z_i}^T \underline{z_i}}} \quad \text{de sorte que}$$

$$\underline{z_i}'^T \underline{z_i}' = \frac{1}{\underline{z_i}^T \underline{z_i}} \underline{z_i}^T \underline{z_i} = 1.$$

De plus, on a toujours

$$\underline{Z}_i'^T \underline{Z}_j' = \frac{1}{\sqrt{\underline{z_i}^T \underline{z_i}}} \frac{1}{\sqrt{\underline{z_j}^T \underline{z_j}}} \underline{z_i}^T \underline{z_j} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Conclusion :

$$\boxed{\underline{\underline{Z}}'^T \underline{\underline{Z}}' = \underline{\underline{E}}}$$

$\underline{\underline{Z}}'$ est orthonormée