Université de Strabourg, Faculté de Chimie, L2

Examen de Mathématiques pour la Chimie

décembre 2015

Durée de l'épreuve : 1h

Tous les documents ainsi que les calculatrices sont interdits.

Le barème proposé est uniquement indicatif.

---

1. Représentation matricielle d'opérations de symétrie [8 points]

Soit $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ une base cartésienne de l'espace réel. On note $\hat{C}_{4x}$ la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dans le sens direct (droitier) autour de l'axe des x, comme indiqué sur la Figure 1. $\hat{C}_{4y}$ désigne la même rotation mais cette fois-ci autour de l'axe des y. On note enfin $\hat{\sigma}$ la réflexion par rapport au plan bissecteur des plans xOz et yOz.

a) **[3 pts]** Que deviennent les vecteurs de la base cartésienne lorsqu'on leur applique $\hat{C}_{4x}$, $\hat{C}_{4y}$ et $\hat{\sigma}$? En déduire les représentations matricielles $\underline{\underline{C_{4x}}} = [\hat{C}_{4x}]$, $\underline{\underline{C_{4y}}} = [\hat{C}_{4y}]$ et $\underline{\underline{\sigma}} = [\hat{\sigma}]$ de ces opérations de symétrie.

b) **[2 pts]** Donner, en utilisant la question 1. a) et sans faire de calculs, la représentation matricielle $\underline{\underline{\Sigma}} = [\hat{\Sigma}]$ de la composition d'opérateurs $\hat{\Sigma} = \hat{C}_{4x}\ \hat{\sigma}\ \hat{C}_{4y}$. Commenter le résultat.

c) **[2 pts]** Montrer que $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{C_{4x}}}\ \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{\underline{C_{4y}}}$.

d) **[1 pt]** Vérifier que $\underline{\underline{\Sigma}}$ est orthonormée. Que peut-on en déduire pour l'opération de symétrie $\hat{\Sigma}$?

2. Matrices idempotentes [12 points]

On dit d'une matrice $\underline{\underline{M}}$ qu'elle est idempotente lorsqu'elle vérifie la condition $\underline{\underline{M}}^2 = \underline{\underline{M}}$.

a) **[1 pt]** Expliquer pourquoi une matrice idempotente doit être carrée.

b) **[1 pt]** Montrer que le déterminant d'une matrice idempotente vaut 0 ou 1.

c) **[1 pt]** Montrer que si $\underline{\underline{M}}$ est idempotente alors sa transposée l'est également.

d) **[1 pt]** Donner deux exemples simples de matrices idempotentes.

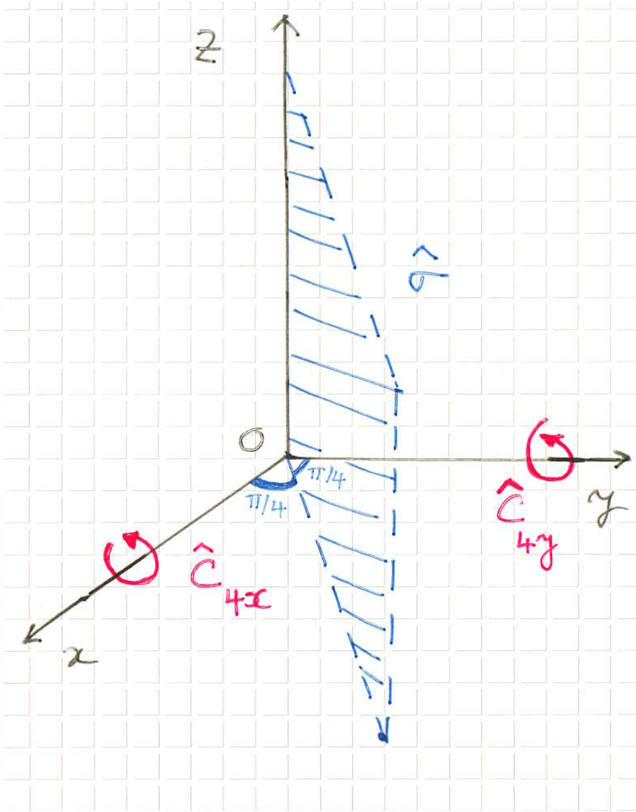

Figure 1: Représentation graphique des opérations de symétrie $\hat{C}_{4x}$, $\hat{C}_{4y}$ et $\hat{\sigma}$.

e) **[2 pts]** Montrer que si $\underline{\underline{M}}$ est idempotente et que son déterminant vaut 1 alors $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{E}}$. **Aide :** expliquer pourquoi $\underline{\underline{M}}$ est inversible puis calculer $\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{M}}^2$.

f) **[3 pts]** On s'intéresse dans la suite aux matrices idempotentes $\underline{\underline{M}}$ d'ordre 2 **qui ne sont égales ni à la matrice identité ni à la matrice nulle**. On rappelle que si $\underline{\underline{M}}$ est diagonalisable alors il existe une matrice $\underline{\underline{Z}}$ inversible telle que $\underline{\underline{Z}}^{-1}\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{D}}$ avec $\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. On supposera dans la suite que $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Montrer que $\underline{\underline{D}}$ est idempotente et en déduire que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$.

g) **[2 pts]** On pose $\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$. Calculer l'inverse de $\underline{\underline{Z}}$ puis conclure que

$$\underline{\underline{M}} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \alpha\delta & -\alpha\gamma \\ \delta\beta & -\gamma\beta \end{bmatrix}.$$

h) **[1 pt]** Vérifier que $\underline{\underline{M}}$ est bien idempotente.

Mathématiques pour la chimie - Examen 2015 - 2016

1. a.

$$\vec{e}_x \xrightarrow{\hat{C}_{4x}} \vec{e}_x \qquad \vec{e}_y \longrightarrow \vec{e}_z \qquad \vec{e}_z \longrightarrow -\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_x \xrightarrow{\hat{C}_{4y}} -\vec{e}_z \qquad \vec{e}_y \longrightarrow \vec{e}_y \qquad \vec{e}_z \longrightarrow \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_x \xrightarrow{\hat{\sigma}} \vec{e}_y \qquad \vec{e}_y \longrightarrow \vec{e}_x \qquad \vec{e}_z \longrightarrow \vec{e}_z$$

$$\underline{\underline{C}}_{4x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{C}}_{4y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b.

$$\begin{tikzcd} \vec{e}_x \arrow[r, "\hat{C}_{4y}"] \arrow[rrr, bend left, "\hat{\Sigma}"] & -\vec{e}_z \arrow[r, "\hat{\sigma}"] & -\vec{e}_z \arrow[r, "\hat{C}_{4x}"] & \vec{e}_y \\ \vec{e}_y \arrow[r] & \vec{e}_y \arrow[r] & \vec{e}_x \arrow[r] & \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \arrow[r] & \vec{e}_x \arrow[r] & \vec{e}_y \arrow[r] & \vec{e}_z \end{tikzcd}$$

d'où $\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\sigma}}$

<u>Conclusion:</u> la composition $\hat{C}_{4x}\,\hat{\sigma}\,\hat{C}_{4y}$ redonne $\hat{\sigma}$!

c. $\underline{\underline{C}}_{4x}\,\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{C}}_{4y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{C}}_{4y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}$

d. $\underline{\underline{\Sigma}}^T \underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{E}} \longrightarrow \underline{\underline{\Sigma}}$ est orthonormée.

2.a. $M^2 = M$

Le produit $M \times M$ est calculable donc M a autant de colonnes que de lignes d'où M est carrée.

2.b. $D(M^2) = D(M) = D^2(M)$

d'où $D(M)\big(D(M) - 1\big) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{D(M) = 0 \quad \text{ou} \quad D(M) = 1}$$

2.c. si $M^2 = M$ alors $(M^2)^T = M^T$

donc $M^T M^T = M^T \Rightarrow (M^T)^2 = M^T$

Ainsi M^T est idempotente.

2.d. $M = E$ ou la matrice nulle.

2.e. Si M est idempotente et $D(M) = 1 \neq 0$ alors M^{-1} existe de sorte que $M^2 = M \rightarrow M^{-1} M^2 = M^{-1} M = E$

donc $\underbrace{M^{-1} M}_{E} M = E \rightarrow \boxed{M = E}$

2.f. • $D^2 = D\,D = Z^{-1} M \underbrace{Z\,Z^{-1}}_{E} M\,Z$

d'où $D^2 = Z^{-1} M^2 Z = Z^{-1} M Z$ soit $\boxed{D^2 = D}$

• $D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1^2 = \lambda_1 \\ \lambda_2^2 = \lambda_2 \end{array}$

On ne peut pas avoir $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1$ car sinon

$D = E \rightarrow M = Z\,D\,Z^{-1} = E \leftarrow$ exclu d'après l'énoncé.

donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$.

(le cas $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ est également exclu d'après l'énoncé)

Puisque $\lambda_1 > \lambda_2$ il vient $\boxed{\lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = 0}$

2.g. $Z = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ $\quad D(Z) = \alpha\delta - \beta\gamma$

$K_Z = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \rightarrow Z^{-1} = \frac{1}{D(Z)} K_Z^T = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$

D'où $M = Z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z^{-1}$

$= \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z^{-1}$

$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \times \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}$

de sorte que $\boxed{\underline{\underline{M}} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \alpha\delta & -\alpha\gamma \\ \beta\delta & -\beta\gamma \end{bmatrix}}$

2. b. $$\underline{\underline{M}}^2 = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha\delta & -\alpha\gamma \\ \beta\delta & -\beta\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha\delta & -\alpha\gamma \\ \beta\delta & -\beta\gamma \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \alpha\delta(\alpha\delta - \gamma\beta) & -\alpha\gamma(\alpha\delta - \beta\gamma) \\ \beta\delta(\alpha\delta - \beta\gamma) & -\beta\gamma(\alpha\delta - \beta\gamma) \end{bmatrix}}$$

Soit $$\underline{\underline{M}}^2 = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)} \begin{bmatrix} \alpha\delta & -\alpha\gamma \\ \beta\delta & -\beta\gamma \end{bmatrix} = \underline{\underline{M}}$$