Licence de Chimie

Université de Strasbourg

Contrôle Final de Mathématique pour Chimistes
2017/2018

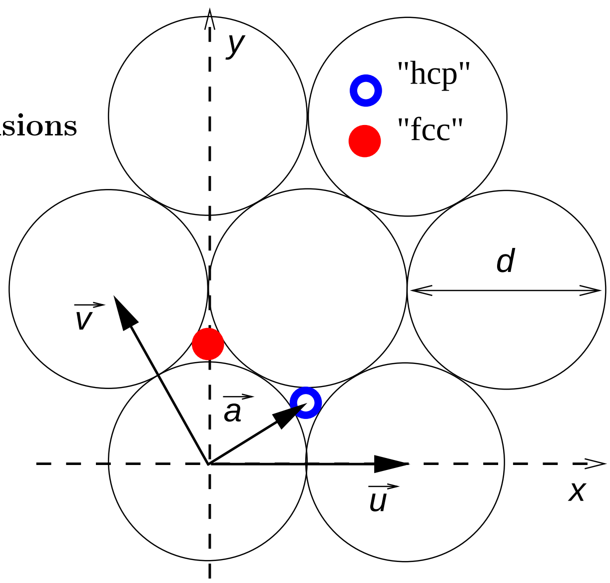
Date : 9/01/2018
Durée : 60 min
Lieu : Amphi Ourisson
Nombre de pages : 4
Remarques :

ON COMPOSE LES RÉPONSES SUR LA FEUILLE DE L'ÉNONCÉ. AUCUN document n'est permis. L'usage de la calculette est autorisé conformément à la circulaire 86.228 du 28/07/1986. Tout échange de calculette et documents entre les candidats est interdit.

Numéro d'anonymat ou d'étudiant :

____

Etudes cristallographiques en 2 dimensions



Les cercles dans la figure ci-contre montrent un arrangement hexagonal d'atomes, qui est typique de plusieurs faces cristallines métalliques. Dans le repère Cartésien indiqué, le vecteur $\vec{v}$ possède la décomposition $\vec{v} = -d/2\vec{e}_{\mathrm{x}} + \sqrt{3}d/2\vec{e}_{\mathrm{y}}$, et le vecteur $\vec{u}$ est parallèle au vecteur $\vec{e}_{\mathrm{x}}$: $\vec{u} = d\,\vec{e}_{\mathrm{x}}$; ici d est la distance (centre-à-centre) entre deux atomes métalliques, ou bien le diamètre d'un cercle, $\vec{e}_{\mathrm{x}}$ est le vecteur normé en direction de x, et $\vec{e}_{\mathrm{y}}$ est le vecteur normé en direction de y.

1) (1 point) Par analyse du graphique, déduire la valeur de la coordonnée $u_x^{(\mathrm{c})}$ du vecteur $\vec{u}$ suivant le vecteur $\vec{e}_{\mathrm{x}}$ en fonction de d. Compléter le vecteur colonne $\underline{u}^{(\mathrm{c})}$ dans la base formée par les vecteurs Cartésiens $\vec{e}_{\mathrm{x}}$ et $\vec{e}_{\mathrm{y}}$.

$$\underline{u}^{(\mathrm{c})} = \begin{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) (2 points) Le vecteur $\vec{u}$ possède la même longueur que le vecteur $\vec{v}$. La projection sur l'axe x de ce dernier vaut $-d/2$. Calculer l'angle θ formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{e}_{\mathrm{x}}$.

3) (1 point) Soit $\vec{w} = 2\vec{v} + \vec{u}$. Indiquer $\vec{w}$ sur la figure.

4) (1 point) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base dans le plan du dessin. Dans cette base, le vecteur $\vec{a}$ reliant le site désigné comme “hcp” possède la décomposition $\vec{a} = 2/3\,\vec{u} + 1/3\,\vec{v}$. Donner les coordonnées Cartésiennes du vecteur $\vec{a}$ en fonction de d. Donner le résultat en complétant le vecteur colonne $\underline{a}^{(\mathrm{c})}$ ci-dessous :

$$\underline{a}^{(\mathrm{c})} \quad = \quad \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$$

5) (2 points) Le site désigné par “fcc” est à la même distance de l'origine du repère que le site “hcp”. Calculer cette distance en fonction de d.

Soit $\underline{\underline{A}}$ la matrice

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

6) (1 point) Vérifier que le déterminant de la matrice $\underline{\underline{A}}$ vaut $\sqrt{3}/2$.

7) (2 points) A la lumière de la question précédente, la matrice $\underline{\underline{A}}$ peut-elle être orthonormée ? Vérifier la réponse par un calcul explicite.

8) (2 points) Calculer la matrice inverse $\underline{\underline{A}}^{-1}$. Vérifier que le calcul est correct en calculant $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}$.

9) (2 points) Calculer le vecteur $\underline{b}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{b}$, où $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que représente le nombre $\sqrt{3}/2$ pour la matrice $\underline{\underline{A}}$? Quel nom porte alors le vecteur $\underline{b}$?

10) (1 point) La matrice $\underline{\underline{A}}$ représente-t-elle une rotation ou une réflexion ? Si elle représente une rotation, indiquer lequel est l'axe de rotation. Si elle représente une réflexion, indiquer lequel est le plan (ou l'axe) de réflexion.

11) (1 point) Montrer que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ vaut $F = d^2\,\sqrt{3}/2$.

12) (2 points) La distance d est déterminée dans une expérience de diffraction de rayons X : $d = (255{,}6 \pm 0{,}3)\,\mathrm{pm}$. Calculer l'aire F du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$, son incertitude et afficher le résultat correctement en tenant compte de tous les chiffres significatifs.

Etudes cristallographiques en 3 dimensions

Soit un axe z qui forme, avec les deux axes x et y indiqués dans la figure, un repère tri-dimensionnel droitier. Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se trouvent donc dans le plan xy. Le vecteur $\vec{e}_\mathrm{z}$ est le vecteur normé en direction de z.

13) (1 point) Calculer le vecteur $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Donner le résultat en complétant le vecteur colonne $\underline{n}^{(\mathrm{c})}$ qui décrit le vecteur $\vec{n}$ dans la base des vecteurs $\vec{e}_\mathrm{x}$, $\vec{e}_\mathrm{y}$ et $\vec{e}_\mathrm{z}$.

$$\underline{n}^{(\mathrm{c})} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

14) (1 point) Le vecteur $\vec{n}$ de la question précédente, pointe-t-il vers vous ou vers l'arrière du plan du dessin ?