TD mathématiques L1 : fonctions de base, dérivées, point d'inflexion

1. Cinétique chimique

a) Si $n = 1$, l'équation (1) devient $f'(t) = -k f(t)$.

Si $f(t) = f(0)\, e^{-kt}$ alors $f'(t) = f(0) \times \left(-k e^{-kt}\right)$

$$= -k \underbrace{f(0)\, e^{-kt}}_{f(t)}$$

f est bien solution !

b) $n > 1$. Soit $f(t) = \left[(n-1)kt + f^{1-n}(0)\right]^{1/1-n}$

Notons que $\frac{1}{(1-n)}$ est bien défini puisque n n'est pas égal à 1.

$$f'(t) = \frac{1}{1-n} \times \left[(n-1)k\right] \times \left[(n-1)kt + f^{1-n}(0)\right]^{\frac{1}{1-n} - 1}$$

où $\frac{1}{(1-n)} - 1 = \frac{1-(1-n)}{(1-n)} = \frac{n}{(1-n)}$ donc

$$f'(t) = -k\left[(n-1)kt + f^{1-n}(0)\right]^{n/(1-n)} = -k\, f^{n}(t)$$

$\Rightarrow$ f est bien solution de l'équation (1) avec $n > 1$.

c) Si $n = 1$, $\ln f(t) = \ln f(0) + \ln e^{-kt} = \ln f(0) - kt$ $\leftarrow$ équation d'une droite de pente $-k$

Il faut donc tracer $\ln f(t)$ en fonction de t.

Si $n > 1$, $f^{1-n}(t) = (n-1)kt + f^{1-n}(0)$ $\leftarrow$ équation d'une droite de pente $(n-1)k$

Il faudrait donc tracer $f^{1-n}(t)$ en fonction de t.

Exemple : pour une réaction d'ordre 2,

$$\frac{1}{f(t)} = kt + \frac{1}{f(0)}.$$

d) $k(T) = A e^{-E_a/RT}$

$$\ln k(T) = \ln A - \frac{E_a}{RT} = \ln A - \left(\frac{E_a}{R}\right) \times \frac{1}{T}$$

Il faut donc tracer $\ln k(T)$ en fonction de $\frac{1}{T}$.

Si la loi d'Arrhénius est correcte, on devrait obtenir une droite dont le coefficient directeur est $-E_a/R$ et l'ordonnée à l'origine vaut $\ln A$.

2. Puits d'énergie d'interaction double

a) $V(x) = \lambda x^4 - 2kx^2$

$$V'(x) = 4\lambda x^3 - 4kx = 4x\left(\lambda x^2 - k\right)$$

$$V'(x) = 4x\left((\sqrt{\lambda}x)^2 - (\sqrt{k})^2\right)$$

soit $\boxed{V'(x) = 4x(\sqrt{\lambda}x - \sqrt{k})(\sqrt{\lambda}x + \sqrt{k})}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{k/\lambda}$		0		$\sqrt{k/\lambda}$		$+\infty$
$V'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$V(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-k^2/\lambda$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-k^2/\lambda$	$\nearrow$	$+\infty$

$x \leq -\sqrt{\dfrac{k}{\lambda}} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\,x + \sqrt{k} \leq 0$

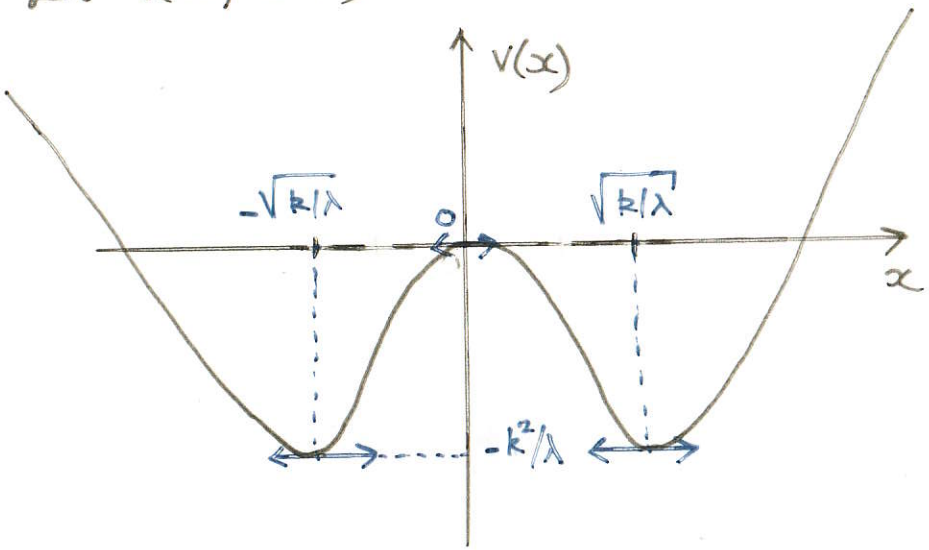
$x \geq -\sqrt{\dfrac{k}{\lambda}} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\,x + \sqrt{k} \geq 0$

$x \leq \sqrt{\dfrac{k}{\lambda}} \Leftrightarrow x\sqrt{\lambda} - \sqrt{k} \leq 0$

$x \geq \sqrt{\dfrac{k}{\lambda}} \Leftrightarrow x\sqrt{\lambda} - \sqrt{k} \geq 0$

$$V(-\sqrt{k/\lambda}) = \lambda\left(\frac{k^2}{\lambda^2}\right) - 2k\frac{k}{\lambda} = -\frac{k^2}{\lambda}$$

On notera que V est une fonction paire soit $V(-x) = V(x)$.



b) $x_0 = \sqrt{k/\lambda}$. L'atome d'azote se situe, à l'équilibre, aux positions x_0 ou $-x_0$. Tout se passe comme si il était "piégé" dans un puits qui se trouve être ici double puisque 2 minima existent.

c) $W = V(0) - V(x_0) = -V(\sqrt{k/\lambda}) = \dfrac{k^2}{\lambda}$

d) $x_0^2 = \dfrac{k}{\lambda}$ et $W = \dfrac{k^2}{\lambda} = \dfrac{\lambda^2 x_0^4}{\lambda} = \lambda x_0^4$

donc $\lambda = \dfrac{W}{x_0^4}$ et $k = \dfrac{W}{x_0^2}$.

Ainsi $V(x) = \dfrac{W}{x_0^4}x^4 - \dfrac{2W}{x_0^2}x^2$

Soit $\boxed{V(x) = W\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^2\left[\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^2 - 2\right]}$

3. Méthode des tangentes

a) Si $f(x) = ax + b$

alors $f(x_0 + x) = ax_0 + b + ax$

$f(x_0 - x) = ax_0 + b - ax$

$f(x_0) = ax_0 + b$

donc

$f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2f(x_0)$

$\forall x, \forall x_0$

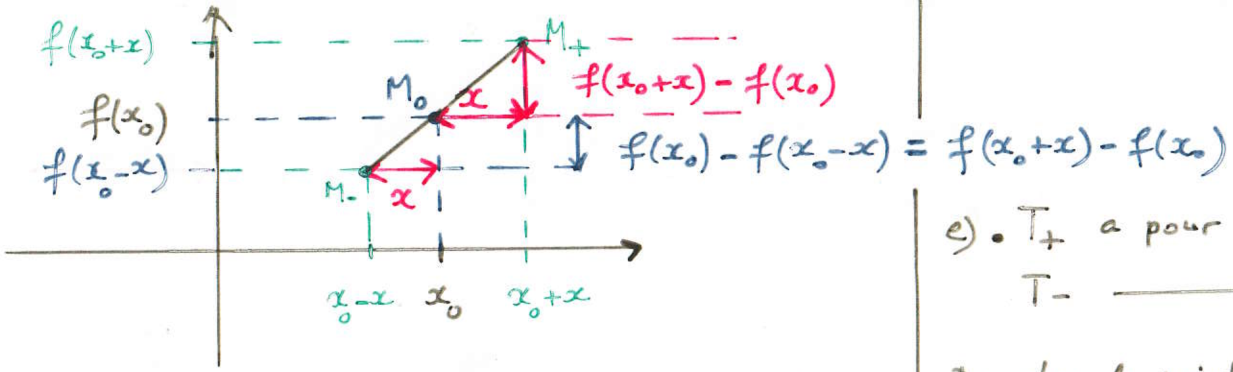
b) $f(x) = 5 + \dfrac{x - 10}{1 + (x-10)^2}$

$f(10 + x) = 5 + \dfrac{x}{1 + x^2}$

$f(10 - x) = 5 - \dfrac{x}{1 + x^2}$

donc $\boxed{f(10 + x) + f(10 - x) = 10 = 2f(10)} \rightarrow x_0 = 10$

c)



Les points M_+ et M_- appartiennent à $\mathcal{C}$ et sont symétriques par rapport à M_0 qui appartient également à $\mathcal{C}$.

d) Soit $g(x) = f(x_0+x) + f(x_0-x)$.

$$g'(x) = f'(x_0+x) - f'(x_0-x) = 0$$

↑ d'après l'équation (3)

$$\text{et } g''(x) = f''(x_0+x) + f''(x_0-x) = 0$$

Ainsi : $\boxed{\begin{array}{l} f'(x_0+x) = f'(x_0-x) \\ \text{et } f''(x_0+x) = -f''(x_0-x) \end{array}}$ Eq. 1 / Eq. 2

D'après Eq. 2 pour $x=0$ il vient $f''(x_0) = -f''(x_0)$

soit $2f''(x_0) = 0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$.

Notons que $f''(x_0+x)$ ne peut pas être nul pour toute valeur de x sinon cela signifie que $f'(x_0+x)$ est une constante et donc que $f(x_0+x)$ est affine en x or f est supposée <u>non affine</u>.

Donc $f''(x)$ va s'annuler en x_0 en changeant de signe (d'après l'Eq. 2)

$\Rightarrow$ x_0 est un point d'inflexion.

e) • T_+ a pour équation $y_+(x) = f'(x_0+a)x + y_+(0)$

T_- ——— $y_-(x) = f'(x_0-a)x + y_-(0)$

De plus, le point $(x_0+a, f(x_0+a))$ appartient à $\mathcal{C}$ et à T_+ donc

$$y_+(x_0+a) = f(x_0+a)$$
$$= f'(x_0+a) \times (x_0+a) + y_+(0)$$

d'où $y_+(0) = f(x_0+a) - f'(x_0+a) \times (x_0+a)$

soit $\boxed{y_+(x) = f'(x_0+a) \times (x - x_0 - a) + f(x_0+a)}$

• De même le point $(x_0-a, f(x_0-a))$ appartient à $\mathcal{C}$ et à T_- donc

$$y_-(x_0-a) = f(x_0-a) = f'(x_0-a) \times (x_0-a) + y_-(0)$$

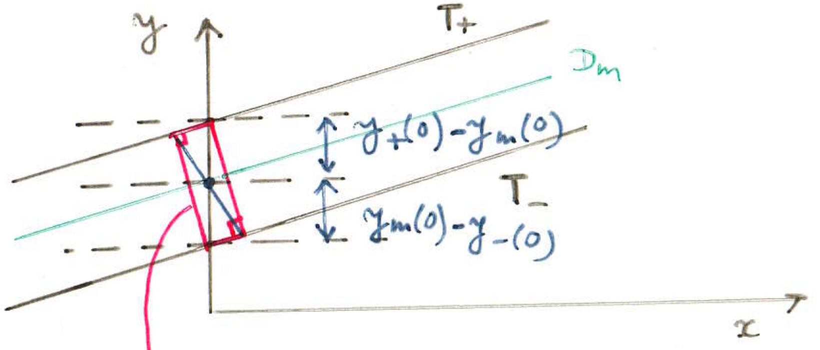
soit $y_-(0) = f(x_0-a) - f'(x_0-a) \times (x_0-a)$

et donc $\boxed{y_-(x) = f'(x_0-a) \times (x - x_0 + a) + f(x_0-a)}$

• T_+ et T_- ont pour pentes respectives $f'(x_0+a)$ et $f'(x_0-a)$ or, d'après l'équation (4), elles sont égales (il suffit de prendre $x=a$) donc <u>T_+ et T_- sont parallèles.</u>

f) D_m est parallèle à T_+ et T_-. Elle a donc le même coefficient directeur. L'équation qui la représente est donc

$$y_m(x) = f'(x_0 - a)\,x + y_m(0) = f'(x_0+a)\,x + y_m(0)$$



Rectangle dont le centre est au milieu des diagonales et par lequel passe la droite D_m.

Ainsi $y_+(0) - y_m(0) = y_m(0) - y_-(0)$

soit $y_m(0) = \dfrac{y_+(0) + y_-(0)}{2}$

D'après la question e), $\begin{cases} y_+(0) = f(x_0+a) - \overbrace{f'(x_0+a)}^{f'(x_0-a)}(x_0+a) \\ y_-(0) = f(x_0-a) - f'(x_0-a)(x_0-a) \end{cases}$

Ainsi $y_m(x) = f'(x_0-a)\,x + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{f(x_0+a) + f(x_0-a)}_{2 f(x_0)\ \forall a \text{ d'après l'équation (3)}}\Big) - \frac{1}{2} f'(x_0-a) \times (2x_0)$

d'où $\boxed{y_m(x) = f'(x_0-a) \times (x - x_0) + f(x_0)}$ Eq.3

g) D'après l'Eq.3,

$y_m(x_0) = f(x_0)$ donc le point M_0 appartient à $\mathcal{C}$ et à la droite D_m.

On notera que ceci est vérifié quel que soit le choix de a.

h)