Mathématiques pour les sciences 2

Contrôle du 25 mai 2023

durée : 2 heures

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.

Il est demandé de détailler tous les calculs de la manière la plus claire possible.

Une rédaction et une écriture soignées seront fortement appréciées.

Exercice 1. — Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A.

2. Est-ce que A est inversible ? Justifier votre réponse (une réponse sans justification ne donnera aucun point).

Exercice 2. — On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$\mathcal{F} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}$ la matrice associée à cette famille dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer les coordonnées dans la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$ de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. — On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient F et G les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 0 \\ 2x + y - z & = & 0 \end{array} \right. \}$$

et

$$G = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}).$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer une base $\mathcal{B}_F$ de F . Quelle est la dimension de F ?

3. Déterminer une base $\mathcal{B}_G$ de G. Quelle est la dimension de G ?

4. Déterminer un système linéaire homogène dont G est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer l'intersection $F \cap G$ de F et G.
6. Déterminer la dimension de la somme $F + G$ de F et G.
7. En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. — Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x - y - z \\ x + y + z \\ x - 2y + z \end{pmatrix} . \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que f est bijective.
4. Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^{-1})$ associée à f^{-1} relativement à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. — On considère l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 6x - 2y - 6z \\ 2y \\ 4x - 2y - 4z \end{pmatrix} \end{array}$$

et notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ associée à f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f. On la notera $\mathcal{B}'_1$.
3. Est-ce que f est injective ? Justifier votre réponse (une réponse sans justification ne donnera aucun point).
4. Déduire de la réponse à la question précédente la dimension de l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.
5. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$. On la notera $\mathcal{B}'_2$.
6. Soit $\mathcal{B}'$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ obtenue en regroupant les vecteurs de $\mathcal{B}'_1$ et de $\mathcal{B}'_2$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Calculer les images par f des vecteurs de $\mathcal{B}'$.
8. En déduire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ associée à f relativement à cette nouvelle base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

TD maths L1

Ex 1 * $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = 1\times \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}_{\underbrace{2\times 7 + 1\times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{2}}_{16}} - 1\times(-1)\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}}_{\underbrace{-1\times 7 + 1\times 2}_{-5}} + 1\times(-1)\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_{\underbrace{-1\times 3 + 2\times 5}_{7}}$$

$\det A = 16 - 5 - 7 = 4 \neq 0 \leftarrow$ A est inversible !

* $A^{-1} = \frac{1}{4} K_A^T$ où $K_A = \begin{bmatrix} 16 & 5 & -6 & -7 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \\ 8 & 3 & -2 & -5 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Calcul des éléments de K_A :

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6$, $-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-7+3) = +4$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 - 4 = 3$, $-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 2 = 8$, $-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2$

$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -(2+3) = -5$, $-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -(5-1) = -4$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$, $-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & -1 \\ -6 & -2 & -2 & 2 \\ -7 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad V$$

Ex2

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \det M = -1\times(-1) - 2\times 0 = 1 \neq 0$$

$$\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow M\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\vec{u} = \vec{e}_x - \vec{e}_y + 2\vec{e}_z, \quad \begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{e}_x - \vec{e}_y \\ \vec{e}_2 = \vec{e}_x + 2\vec{e}_z \\ \vec{e}_3 = -\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} \Leftrightarrow M\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = M^{-1}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} -2 & +1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3}$$

Ex3

$$* \ F: \begin{cases} x + y - z = 0 & (1) \\ 2x + y - z = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ y = z \end{cases} \quad (1)-(2)$$

un vecteur de F s'écrit $\begin{bmatrix}0\\y\\y\end{bmatrix} = y\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}}_{\text{base de F}}$

$\dim F = 1$

$$* \ G: \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det M = -9 + 3\times 3 = 0$$

base de G : $\underline{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\dim G = 2$

ne sont pas colinéaires!

On note que $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

* $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \underline{u_1} + \beta \underline{u_2} = \begin{bmatrix} (\alpha+\beta) \\ 2\beta - \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + \beta \\ y = 2\beta - z \\ z = \alpha \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = x - z \\ 2\beta = y + z \\ z = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-z) = y+z \\ \beta = x - z \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{2x - y - 3z = 0}$$

* $F \cap G$: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0$

$F \cap G = \vec{0}$ ← "pas de recouvrement" ⇔ "disjoints"

* $\underbrace{F}_{\dim 1} + \underbrace{G}_{\dim 2}$ ← $\dim = 3$

Ex4 $f\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \alpha f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$M = M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ⟵ $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$

$\det M = -1 \times (-3) + 3 = 6 \neq 0 \Rightarrow M$ est inversible donc f est bijective

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \arrow[r, bend left, "f \equiv M"] & M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \arrow[l, bend left, "f^{-1} \equiv M^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$(M^{-1})^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ +3 & 2 & +1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Ex5

$$* \quad M(f) = M = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

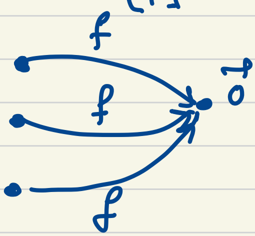
$\det M = 6\times(-8) + 4\times 12 = 0$

$\mathrm{Tr}\, M = 4$

$$* \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y - 6z = 0 \\ 2y = 0 \\ 4x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \right\} \leftarrow \text{base} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathcal{B}'_1$$

* Tous les vecteurs de la forme $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ donnent le vecteur nul après application de f



f n'est pas injective

* $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ base complémentaire de $\mathbb{R}_3$

$\forall\, \underline{u} \in \mathbb{R}^3 \qquad M\underline{u} = M(\alpha \underline{e}_1 + \beta \underline{e}_2 + \gamma \underline{e}_3) = \beta M\underline{e}_2 + \gamma M\underline{e}_3$

__Question:__ $M\underline{e}_2$ et $M\underline{e}_3$ peuvent-ils être linéairement dépendants ?

Si c'est le cas alors $M\underline{e}_2 = \delta M\underline{e}_3 \Leftrightarrow M(\underbrace{\underline{e}_2 - \delta \underline{e}_3}_{\in \mathrm{Ker} f}) = \underline{0}$ IMPOSSIBLE !

__Conclusion:__ $\boxed{\dim \mathrm{Im}(f) = 2}$

* Tout vecteur de $\mathrm{Im} f$ s'écrit

$$x\begin{bmatrix}6\\0\\4\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-2\\2\\-2\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-6\\0\\-4\end{bmatrix}=(x-z)\begin{bmatrix}6\\0\\4\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-2\\2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_2'=\left\{\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

* $$\mathcal{B}'=\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{\underline{e}_1},\underbrace{\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}}_{\underline{e}_2},\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}}_{\underline{e}_3}\right\}$$

$$\begin{vmatrix}1&3&-1\\0&0&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=-1\times(-1)=1\neq 0$$

* $$f(\underline{e}_1)=\underline{0},\quad f(\underline{e}_2)=\begin{bmatrix}6\\0\\4\end{bmatrix}=2\underline{e}_2,\quad f(\underline{e}_3)=\begin{bmatrix}-2\\2\\-2\end{bmatrix}=2\underline{e}_3$$

* $$M_{\mathcal{B}'}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

Notons que $\det M_{\mathcal{B}'}=\det M_{\mathcal{B}}=0$

$\mathrm{Tr}\, M_{\mathcal{B}'}=\mathrm{Tr}\, M_{\mathcal{B}}=4$

Complément: valeurs propres de M

$$\begin{vmatrix}6-\lambda&-2&-6\\0&2-\lambda&0\\4&-2&-4-\lambda\end{vmatrix}=0\iff(6-\lambda)(2-\lambda)(4+\lambda)(-1)+4\times 6(2-\lambda)=0$$

$$\iff(2-\lambda)\underbrace{\left[(\lambda-6)(4+\lambda)+6\times 4\right]}_{4\lambda+\lambda^2-6\lambda=\lambda(\lambda-2)}=0$$

$$\iff(\lambda-2)^2\lambda=0$$